ÍNDICE

INTRODUCCIÓN **13**

CIRCUITOS DE CORRIENTE CONTINUA **19**

Corriente eléctrica. Ecuación de continuidad. Primera ley de Kirchhoff. Ley de Ohm. Ley de Joule. Fuerza electromotriz. Segunda ley de Kirchhoff. Asociación de resistencias. Análisis de redes. Métodos de análisis de circuitos. Teoremas de redes.

CIRCUITOS CON CORRIENTE VARIABLE **97**

Componentes. Circuito R - L serie. Circuito R - C serie. Circuito R - L - C serie.

CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA **125**

Función sinusoidal. Análisis de componentes pasivos. Análisis del circuito R - L serie. Análisis del circuito R - C serie. Análisis del circuito R - C serie. Análisis del circuito R - L - C serie. Asociación de impedancias. Potencia. Análisis con frecuencia variable.

ANÁLISIS DE REDES **179**

Métodos de análisis. Teoremas de redes. Cuadripolos.

A RELACIONES MATEMÁTICAS **243**

B TABLAS **249**

Bibliografía **253**

GLOSARIO **255**

Capítulo 2

CIRCUITOS CON CORRIENTE VARIABLE

FENÓMENOS TRANSITORIOS

ESQUEMA - RESUMEN

Objetivos

Genéricos

Análisis de los fenómenos transitorios en circuitos con resistencia y autoinducción en serie, circuitos $R-L$; circuitos con resistencia y un condensador en serie, circuitos $R-C$, y con resistencia autoinducción y condensador en serie, circuitos $R-L-C$, cuando se produce un cambio brusco de la tensión aplicada o una modificación repentina de uno de los componentes del circuito.

Específicos

- Comprender el comportamiento con corriente variable, de los distintos componentes que intervienen en un circuito.
- Saber manejar las leyes de Kirchhoff para establecer las ecuaciones que describen el comportamiento transitorio de circuitos $R-L$ y $R-C$.

- Analizar la solución de las ecuaciones obtenidas en el apartado anterior.
- Comprender las analogías y diferencias entre las corrientes en circuitos $R-L$, $R-C$ y $R-L-C$.
- Representación gráfica de dichas corrientes.
- Concepto de constante de tiempo en los circuitos indicados.
- Fenómenos transitorios en un circuito $R-L-C$.
- Características de los comportamientos oscilatorio, oscilatorio amortiguado, amortiguado y amortiguado crítico.
- Factores característicos: Frecuencia propia, seudoperiodo, constante de tiempo, decremento logarítmico y resistencia crítica.

Requisitos previos

Manejar los conceptos desarrollados en el capítulo anterior y saber aplicar los instrumentos de cálculo como la derivación, integración y ecuación diferencial.

En este capítulo estudiaremos el comportamiento de circuitos cuando se produce en ellos un cambio brusco de las condiciones de funcionamiento. Esto sucede al modificar repentinamente una tensión no periódica, siendo el ejemplo más común la conexión de un voltaje constante.

Consideramos que todos los componentes que intervienen son ideales, es decir, las resistencias, condensadores, inductancias y generadores son ideales, por lo que cada componente queda perfectamente identificado con el símbolo que lo representa. También suponemos que dichos componentes son lineales y localizados en la zona del circuito que se indique.

2.1. COMPONENTES

2.1.1. Capacidad e inductancia

Condensador: Capacidad

Un condensador es un elemento de circuito construido con dos placas metálicas paralelas separadas por un dieléctrico. La característica de un condensador es su **capacidad** C, *que es la relación entre la carga que almacena y la diferencia de potencial entre sus placas.*

$$C = \frac{q}{v} \tag{2.1}$$

Un condensador es un elemento del circuito capaz de almacenar energía eléctrica en el campo eléctrico que hay entre sus placas. Se representa por el símbolo de la figura 2.1a. Cuando se carga o descarga un condensador, varía la carga en sus placas y por tanto su diferencia de potencial. La carga o descarga se realiza cuando se unen las placas, bien a una fuente o a otro elemento como por ejemplo un conductor o una resistencia. De la ecuación anterior se deduce que,

$$q = Cv$$

La variación de carga da lugar a una corriente en el exterior del condensador,

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Dada la relación entre carga y tensión, podemos deducir la *ecuación característica que relaciona corriente y tensión en un condensador*, que con las referencias dadas en esta figura 1.1a es,

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \tag{2.2}$$

Donde C *es la* **capacidad** *del condensador. Se mide en Faradios (F) y una unidad de esta magnitud equivale a un amperio·segundo/voltio* (A·s/V). El faradio es, en la práctica una unidad excesivamente grande y los valores de los condensadores se suelen dar en microfaradios (μF) o en picofaradios (pF). Podemos comprobar que un aumento de tensión corresponde a una corriente positiva y una reducción de la tensión aplicada al condensador corresponde a una corriente negativa. También se observa que si la tensión $v(t)$ es constante, entonces la corriente $i(t)$ es cero. De modo que un condensador alimentado con una fuente de tensión continua, una vez cargado, actúa como un circuito abierto.

De la expresión (2.2) se deduce que la tensión en bornes del condensador es una función continua, ya que de otro modo su derivada no estaría definida en los puntos de discontinuidad. Por tanto en los bornes de un condensador no puede haber variaciones bruscas de tensión, independientemente del circuito al que se encuentre conectado.

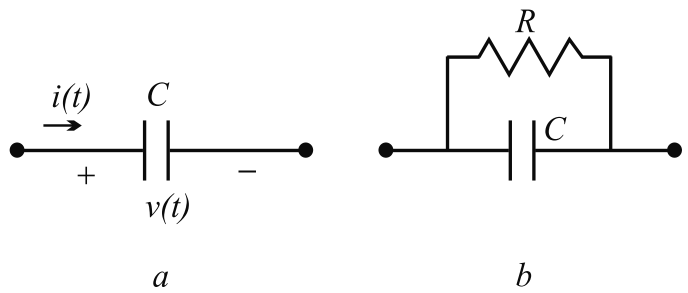

Figura 2.1

La relación inversa a la (2.2) se puede obtener por integración entre un instante inicial t_o y un instante t, resultando:

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{C}i(t) \quad \Rightarrow \quad \int_{t_o}^{t} \frac{dv(t)}{dt}dt = \frac{1}{C}\int_{t_o}^{t} i(t)dt$$

Que al integrar nos da,

$$v(t) = v_o + \frac{1}{C}\int_{t_o}^{t} i(t)dt \tag{2.3}$$

que indica que la *tensión en los bornes del condensador en un tiempo* $t > t_o$ *es igual a la tensión acumulada desde* $-\infty$ *hasta el instante* t_o **más** *la tensión acumulada a partir de este instante.*

La energía almacenada en el condensador se puede calcular obteniendo la potencia suministrada a dicho condensador.

$$p(t) = v(t)i(t) = Cv(t)\frac{dv(t)}{dt} \tag{2.4}$$

La energía almacenada en el campo eléctrico dentro del condensador es,

$$w_C(t) = \int_{-\infty}^{t} p(t)dt = \int_{-\infty}^{t} Cv(t)\frac{dv(t)}{dt}dt = \int_{v(-\infty)}^{v(t)} Cv(t)dv(t) = \frac{1}{2}Cv^2(t)$$

Ya que suponemos que en $t = -\infty$ el condensador esta descargado.

$$w_C(t) = \frac{1}{2}Cv^2(t) \tag{2.5}$$

La ecuación (2.5) es la energía almacenada en el condensador, que es igual a la suministrada por la fuente para cargarlo.

En la práctica el condensador real suele presentar unas pérdidas representadas por medio de una resistencia en paralelo con el condensador como se indica en la figura 2.1*b*.

Bobina: Inductancia

Una bobina o inductor es un componente de circuito formado por el arrollamiento de un conductor sobre un núcleo, cilíndrico o no, que se caracteriza por un parámetro llamado inductancia L. Los núcleos de las bobinas pueden ser no magnéticos y magnéticos, los magnéticos concentran más las líneas de campo magnético dentro del núcleo, por lo que se producen menos pérdidas; es decir, hay menos líneas de campo que no atraviesan todas las espiras de la bobina. Una bobina es un elemento de circuito capaz de almacenar energía magnética. Se representa por el símbolo de la figura 2.2*a*. En la bobina los cambios de flujo del campo magnético, debido a la ley de inducción electromagnética, producen variaciones de tensión entre sus bornes o terminales. *El cambio de flujo magnético es proporcional a la variación de corriente en la bobina, siendo la* **inductancia o coeficiente de autoinducción** *L la constante de proporcionalidad.* La ecuación que expresa estas ideas, conocida como *la ecuación característica de la bobina*, con las referencias indicadas en la figura 2.2*a* es,

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \tag{2.6}$$

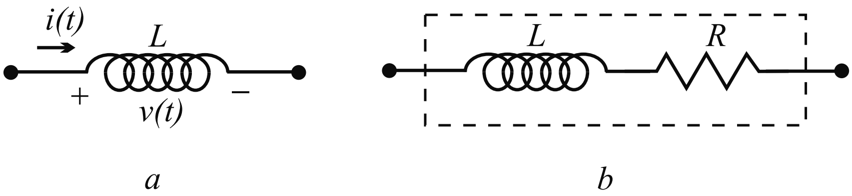

Figura 2.2

El **coeficiente de autoinducción** o **inductancia** L *se mide en Henrios* (H) *y equivale a un voltio·segundo/amperio* (V·s/A). Los rangos usados normalmente en electrónica son del orden de milihenrios (mH). Podemos comprobar que un aumento de la corriente corresponde a una tensión positiva y una reducción de la corriente da lugar a una tensión negativa. También se observa que si la corriente es constante, entonces la tensión $v(t)$ es cero. De modo que una bobina alimentada con una corriente continua actúa como un cortocircuito. Si por el contrario, la corriente $i(t)$ cambia con rapidez, se obtendrá una tensión elevada entre los terminales.

Otro aspecto a considerar y que se deduce de la expresión (2.6) es que la corriente en los bornes de una bobina no puede variar bruscamente ya que la tensión se haría infinita, lo que es físicamente imposible. Por tanto, la corriente en una bobina es una función continua.

La relación inversa a la (2.6) se puede obtener por integración entre un instante inicial t_o y un instante t:

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L}v(t) \quad \Rightarrow \quad \int_{t_0}^{t} \frac{di(t)}{dt}dt = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

Que al integrar nos da

$$i(t) = i_o + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(t)dt \tag{2.7}$$

Que indica que la corriente en la bobina en un tiempo $t > t_o$ es igual a la corriente hasta el instante t_o **más** la corriente que se desarrolla a partir de este instante.

La potencia que puede liberar el inductor es la misma, salvo pérdidas, que almacena y que le suministra la fuente al establecer la corriente.

$$p(t) = v(t)i(t) = L\frac{di(t)}{dt}i(t)$$

La *energía almacenada en la bobina* será,

$$w_L(t) = \int_{-\infty}^{t} p(t)dt = \int_{-\infty}^{t} L\frac{di(t)}{dt}i(t)dt = \int_{i(-\infty)}^{i(t)} Li(t)d(i(t))$$

$$w_L(t) = \frac{1}{2}Li^2(t) \tag{2.8}$$

En una bobina real, asociado con el valor de la autoinducción hay también una resistencia debido a que la bobina consiste en un conductor arrollado sobre un núcleo que puede ser o no de material ferromagnético en el que también se producen efectos térmicos. Por tanto, el circuito equivalente a una bobina real es una autoinducción ideal en serie con una pequeña resistencia como muestra la figura 2.2*b*.

2.2. CIRCUITO $R-L$ SERIE

2.2.1. Tensión escalón

La conexión de un voltaje constante a un circuito se caracteriza mediante una señal eléctrica denominada **tensión escalón**. *Esta se representa por una función escalón, cuya expresión matemática es la siguiente*:

$$V(t) = \begin{cases} 0 & \text{para todo } t < 0 \\ \\ V_o & \text{para todo } t \geq 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

Una función escalón $V(t)$, toma un valor constante en el origen de tiempos.

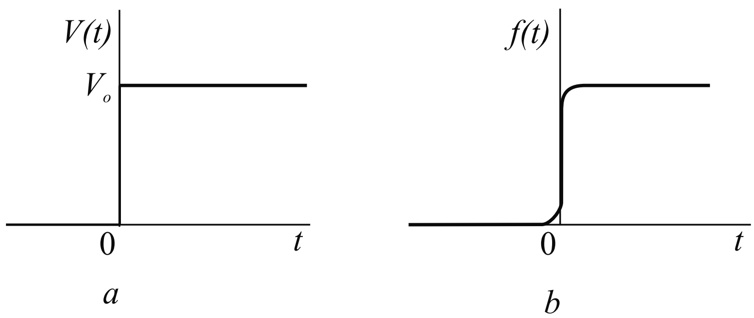

Figura 2.3

La función escalón es físicamente irrealizable, debido a que los componentes físicos tienen naturaleza continua y no es posible un salto instantáneo. En la figura 2.3*a* y *b* se muestra esta función y una función escalón real.

2.2.2. Corriente de conexión

Dado un circuito con resistencia e inductancia en serie, circuito $R - L$ serie, como el indicado en la figura 2.4, nos interesa conocer la respuesta, es decir, la corriente que circula por el circuito cuando se le aplica un voltaje constante V_o.

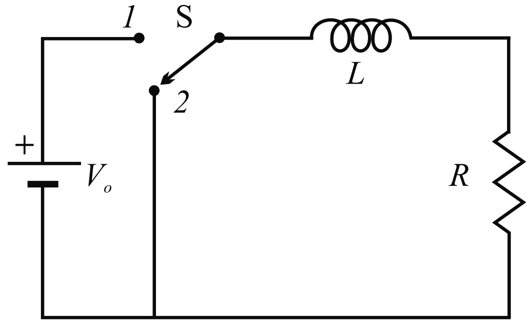

Figura 2.4

La corriente se calcula resolviendo la ecuación diferencial que gobierna el comportamiento del circuito. Dicha ecuación diferencial se obtiene aplicando la ley de Kirchhoff para los voltajes,

$$\sum \mathcal{E}_i = \sum R_i \, i_i$$

En el caso del circuito que nos ocupa los valores de $\mathcal{E}_i$ son por un lado la que corresponde a la batería unida al circuito y por otro la fuerza electromotriz inducida en la autoinducción L cuando varía la corriente que circula por ella, dicha f.e.m. es, como se demuestra al estudiar la inducción electromagnética, igual a $-L(di/dt)$; el signo menos indica que se opone al paso de corriente que la origina. La suma de fuerzas electromotrices será,

$$\sum \mathcal{E}_i = V_o - L\,\frac{d\,i}{d\,t}$$

El segundo miembro, dado que sólo hay una resistencia, es

$$\sum R_i \, i_i = R \, i$$

La forma habitual de expresar la ecuación diferencial que resume lo dicho anteriormente es,

$$L\frac{d\,i}{d\,t} + R \, i = V_o \tag{2.10}$$

La solución de la ecuación (2.10) se obtiene de la forma siguiente: Primero resolvemos la ecuación homogénea y después añadimos la solución particular de la no homogénea.

Solución de la ecuación homogénea,

$$L \frac{d\,i}{d\,t} + R\,i = 0$$

Esta ecuación es lineal de primer orden con coeficientes constantes, y su solución es del tipo $i = M \exp(\alpha t)$. Si llevamos ésta solución a la ecuación diferencial homogénea, es decir, realizando las operaciones que indica la ecuación, podemos comprobar que la verifica con un valor de $\alpha = -R/L$. La solución es por tanto una corriente de forma,

$$i = M \exp(-\frac{R}{L}\,t)$$

Podemos comprobar que esta corriente verifica la ecuación diferencial homogénea, es decir, si multiplicamos por L la derivada de i con respecto a t y sumamos el producto de R por i encontramos que el resultado es cero.

Solución particular de la no homogénea.

$$L \frac{d\,i}{d\,t} + R\,i = V_o$$

Una solución de la forma $i = V_o/R$ verifica la ecuación, ya que con i constante $di/dt = 0$.

Sumando ambas soluciones obtenemos la solución general de la ecuación (2.10), que es,

$$i = M \exp(-\frac{R}{L}\;t) + \frac{V_o}{R} \tag{2.11}$$

La constante de integración M se determina aplicando las condiciones iniciales del circuito.

Cuando $t = 0$ la variación de la corriente i es muy rápida y la f.e.m. inducida que se opone a la variación de corriente es igual a V_o, por tanto $i(0) = 0$. Llevando esta condición a la ecuación (2.11) obtenemos,

$$M \exp(-\frac{R}{L}\,0) + \frac{V_o}{R} = M + \frac{V_o}{R} = 0$$

Despejando se obtiene M,

$$M = -\frac{V_o}{R}$$

Sustituyendo el valor de M en la ecuación (2.11) tendremos i,

$$i = \frac{V_o}{R}(1 - \exp(-\frac{R}{L}\,t)) = \frac{V_o}{R}(1 - e^{-(R/L)\;t}) \tag{2.12}$$

La ecuación (2.12) *expresa el comportamiento de la corriente en el circuito* $R - L$ *cuando se le aplica repentinamente un voltaje* V_o. La representación gráfica de dicha corriente se indica en la figura 2.5.

La corriente parte de un valor nulo para $t = 0$ y alcanza el valor V_o/R para $t = \infty$. Es decir, inicialmente la inductancia se opone al paso de la corriente y cuando transcurre tiempo el único elemento que limita la corriente es la resistencia R. Vemos por tanto que la inductancia se opone a los cambios bruscos de corriente.

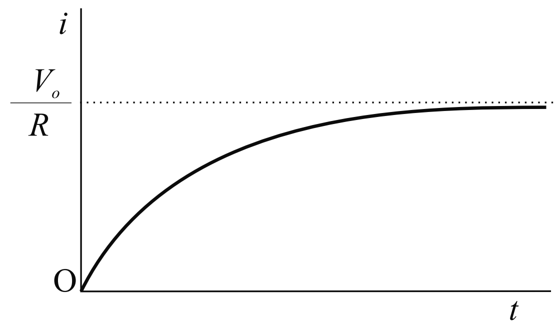

Figura 2.5

2.2.3. Constante de tiempo del circuito $R - L$

Dado que la corriente tiende al valor V_o/R o al valor cero de una forma muy lenta a partir de un tiempo t, interesa calcular un parámetro que nos indique la rapidez con que se alcanza un valor significativo de la corriente.

Si observamos la ecuación (2.12), cuando el exponente es la unidad, $(R/L)\,t = 1$, la corriente es,

$$i = \frac{V_o}{R}\,(1 - \exp(-1) \simeq \frac{V_o}{R}\,(1 - 0,368)$$

$$i \simeq \frac{V_o}{R}\,0,632$$

De lo anterior se deduce que para $t = L/R = \tau$, la corriente alcanza prácticamente el 63 % del valor final. La constante

$$\tau = \frac{L}{R} \tag{2.13}$$

Recibe el nombre de **constante de tiempo** *del circuito* $R - L$, *y es un parámetro que nos da idea del predominio de la componente inductiva sobre la resistiva, o viceversa. Además nos indica la rapidez con que se alcanza un valor significativo de la corriente (el 63,2 % de su valor final). La constante* τ *tiene dimensiones de tiempo.*

2.3. CIRCUITO $R - C$ SERIE

2.3.1. Corriente de conexión

En este apartado analizaremos el comportamiento de la corriente en un circuito $R-C$ en serie como el indicado en la figura 2.6 cuando se le conecta a un generador.

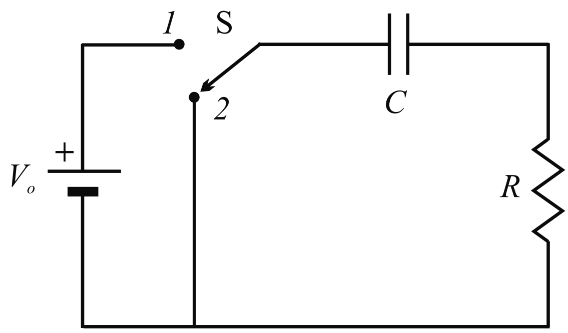

Figura 2.6

La forma de operar es similar al caso del circuito $R - L$. La conexión al generador se efectúa pasando el conmutador S de la figura 2.6 a la posición 1.

Aplicando la ley de Kirchhoff para voltajes obtenemos la ecuación diferencial que gobierna el comportamiento del circuito. En este caso, q es la carga del condensador en cada instante y el voltaje entre las placas del condensador, según la definición de capacidad de un condensador ($C = q/v$), será $v = q/C$. Por tanto, *la tensión aplicada* V_o *es igual a la caída de tensión en la resistencia más la correspondiente al condensador*, es decir,

$$V_o = \frac{q}{C} + R\, i \tag{2.14}$$

Dado que $i = dq/dt$, la ecuación anterior queda de la forma,

$$V_o = \frac{q}{C} + R\, \frac{d\,q}{d\,t} \tag{2.15}$$

La solución se obtiene de forma similar al caso del circuito $R-L$, ya que es el mismo tipo de ecuación diferencial.

Solución de la homogénea,

$$q = N \exp(-\frac{t}{RC})$$

Solución particular de la no homogénea,

$$q = V_o \, C$$

La solución general será,

$$q = N \exp(-\frac{t}{RC}) + V_o \, C$$

Como en el caso anterior, para determinar la constante N aplicamos las condiciones iniciales. En este caso, si suponemos inicialmente descargado el condensador C, en $t = 0$, $q = 0$, de donde se deduce que,

$$N \exp(0) + V_o C = 0 \quad \rightarrow \quad N = -V_o C$$

Por tanto,

$$q = V_o C(1 - \exp(-\frac{t}{RC})) \tag{2.16}$$

La expresión para la corriente se obtiene derivando la ecuación (2.16) con respecto al tiempo, de forma que,

$$i = \frac{V_o}{R} \exp(-\frac{t}{RC}) \tag{2.17}$$

Es decir, *la corriente varia desde el valor inicial V_o/R hasta cero para* $t = \infty$, lo que expresa que el valor inicial de la corriente sólo está limitado por la resistencia R, ya que el condensador en el instante inicial se comporta como un cortocircuito, pues el voltaje entre sus placas es nulo cuando $q = 0$.

La representación gráfica de las variaciones de q e i con el tiempo se muestra en la figura 2.7a y b.

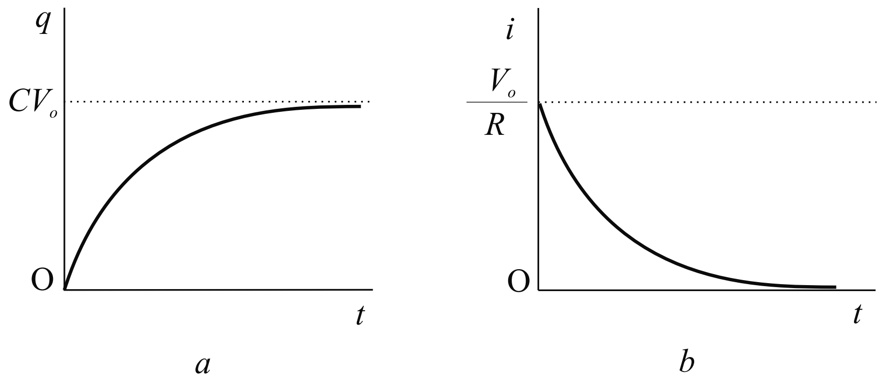

Figura 2.7

2.3.2. Constante de tiempo del circuito $R - C$

Operando de forma análoga al caso del circuito $R-L$ obtenemos que para $t = RC$, tanto la carga expresada por la ecuación (2.16) como la tensión q/C, alcanzan aproximadamente el 63,2 % de su valor final. Al mismo tiempo la corriente i (2.17) y el voltaje en bornes de la resistencia R, decrecen hasta el 36,8 % aproximadamente de su valor inicial.

Como establecíamos para el circuito $R - L$, en este caso la **constante de tiempo** *es*,

$$\tau = RC \tag{2.18}$$

τ nos muestra la rapidez o lentitud con que se verifica el proceso de carga y descarga del condensador. En este circuito cuanto mayor sean R y C tanto más tardarán en alcanzarse los valores finales de q e i calculados anteriormente.

2.4. CIRCUITO $R - L - C$ SERIE

En este apartado estudiaremos el comportamiento del circuito indicado en la figura 2.8, cuando el conmutador S conecta el circuito a la batería (posición 1). Después estudiamos dicho circuito cuando el conmutador pasa de la posición 1 a la 2 una vez cargado por completo el condensador, es decir, cortocircuitamos, lo que produce la descarga del condensador.