

ÍNDICE

CIRCUITOS DE CORRIENTE CONTINUA	7
CIRCUITOS CON CORRIENTE VARIABLE	38
CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA	51
ANÁLISIS DE REDES	75

Capítulo 4

ANÁLISIS DE REDES

PROBLEMA 4.1

Dado el circuito que muestra la figura P4.1, calcular la tensión V_{AB} en función de la tensión V_1 que suministra el generador de corriente alterna.

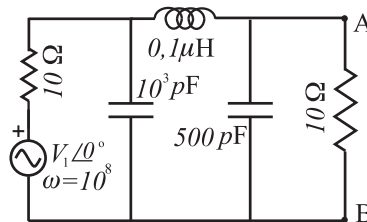


Figura P4.1

Solución

En primer lugar vamos a calcular las reactancias que corresponden a los respectivos componentes para la frecuencia de operación.

$$jX_{C1} = -\frac{j}{10^8 \times 10^{-9}} = -j10 ; jX_{C2} = -j\frac{1}{10^8 \times 5 \times 10^{-10}} = -j20$$

$$jX_L = j10^8 \times 10^{-7} = j10$$

Las ecuaciones del circuito son:

$$V_1 = (10 - j10)\mathbf{I}_1 + j10\mathbf{I}_2 + 0$$

$$0 = j10\mathbf{I}_1 - j20\mathbf{I}_2 + j20\mathbf{I}_3$$

$$0 = 0 + j20\mathbf{I}_2 + (10 - j20)\mathbf{I}_3$$

La tensión $\mathbf{V}_{AB} = 10\mathbf{I}_3$, por tanto debemos calcular $\mathbf{I}_3$ mediante el sistema de ecuaciones anterior. Aplicando el método de Cramer:

$$\mathbf{I}_3 = \frac{\begin{vmatrix} (10 - j10) & j10 & V_1 \\ j10 & -j20 & 0 \\ 0 & j & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (10 - j10) & j10 & 0 \\ j10 & -j20 & j20 \\ 0 & j20 & (10 - j20) \end{vmatrix}} = \frac{-10V_1}{-(1 - j4) 10^3} = \frac{10^{-2}}{17} (1 + j4) V_1$$

Realizando operaciones,

$$\mathbf{I}_3 \simeq 10^{-3} (0,588 + j2,353) V_1$$

La tensión será:

$$V_{AB} = 10\mathbf{I}_3 \simeq 10^{-2} (0,588 + j2,353j) V_1 \quad [\text{V}]$$

PROBLEMA 4.2

En la figura P4.2 se muestra el diagrama de un circuito de c.a. Calcular la corriente que circula por la rama A-B.

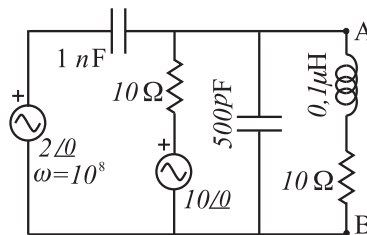


Figura P4.2

Solución

Procedemos de forma similar al caso anterior.

$$jX_{C1} = -\frac{j}{\omega C_1} = \frac{-j}{10^8 \times 10^{-9}} = -j10; \quad jX_{C2} = \frac{-j}{10^{-10} \times 5 \times 10^8} = -j20$$

$$jX_L = j10^8 \times 10^{-7} = j10$$

Las ecuaciones de red, suponiendo que todas las corrientes de malla tienen sentido horario, son:

$$\begin{aligned}
2 - 10 &= (10 - j10)\mathbf{I}_1 - 10\mathbf{I}_2 + 0 \\
10 &= -10\mathbf{I}_1 + (10 - j20)\mathbf{I}_2 + j20\mathbf{I}_3 \\
0 &= 0 + j20\mathbf{I}_2 + (j10 - j20 + 10)\mathbf{I}_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-8 &= (10 - j10)\mathbf{I}_1 - 10\mathbf{I}_2 + 0 \\
10 &= -10\mathbf{I}_1 + (10 - j20)\mathbf{I}_2 + j20\mathbf{I}_3 \\
0 &= 0 + j20\mathbf{I}_2 + (10 - j10)\mathbf{I}_3
\end{aligned}$$

La corriente por la rama A-B es $\mathbf{I}_3$, por tanto calculamos dicha corriente mediante el sistema de ecuaciones anterior. Utilizando el método de Cramer.

$$\mathbf{I}_3 = \frac{\begin{vmatrix} (10 - j10) & -10 & -8 \\ -10 & (10 - j20) & 10 \\ 0 & j20 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (10 - j10) & -10 & 0 \\ -10 & (10 - j20) & j20 \\ 0 & j20 & 10 - j10 \end{vmatrix}} = \frac{-10^2(20 - j4)}{-10^3(1 + j5)} = -j\frac{2}{5}$$

$$\mathbf{I}_3 = -j\frac{2}{5} = -j0,4 \quad [\text{A}]$$

$$|\mathbf{I}_3| = 0,4 \quad [\text{A}] \quad ; \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

PROBLEMA 4.3

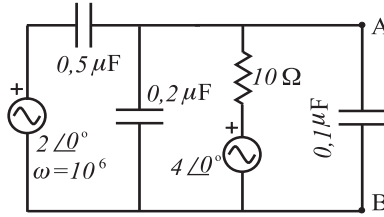
Calcular la tensión V_{AB} en el circuito que muestra la figura P4.3.

Solución

La tensión pedida es la misma que existe en los terminales del condensador de $0,1 \mu\text{F}$.

Las reactancias correspondientes a los dos condensadores de $0,5$, $0,2$ y $0,1 \mu\text{F}$ son:

$$\begin{aligned}
jX_{C1} &= \frac{-j}{5 \times 10^{-7} \times 10^6} = -j2 \quad ; \quad jX_{C2} = \frac{-j}{2 \times 10^{-7} \times 10^6} = -j5 \\
jX_{C3} &= -j\frac{1}{10^6 \times 10^{-7}} = -j10
\end{aligned}$$

**Figura P4.3**

Sustituyendo el valor de $\mathbf{Z}$ la red o circuito se reduce a tres mallas o lazos, y el sistema de ecuaciones correspondiente, suponiendo que las corrientes de malla tienen el sentido horario, es:

$$\begin{aligned} 2 &= -j7\mathbf{I}_1 + j5\mathbf{I}_2 + 0 \\ -4 &= j5\mathbf{I}_1 + (10 - j5)\mathbf{I}_2 - 10\mathbf{I}_3 \\ 4 &= 0 - 10\mathbf{I}_2 + (10 - j10)\mathbf{I}_3 \end{aligned}$$

Para obtener la tensión V_{AB} debemos calcular la corriente $\mathbf{I}_3$ y multiplicarla por $\mathbf{Z}$.

Calculamos $\mathbf{I}_3$ mediante el sistema de ecuaciones anterior, utilizando el método de Cramer.

$$\mathbf{I}_3 = \frac{\begin{vmatrix} -j7 & j5 & 2 \\ j5 & (10 - j5) & -4 \\ 0 & -10 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -j7 & j5 & 0 \\ j5 & (10 - j5) & -10 \\ 0 & -10 & (10 - j10) \end{vmatrix}} = \frac{-10(4 + j10)}{100(-8 + j)} = \frac{1}{325}(11 + j42)$$

$$\mathbf{I}_3 = 3,385 \times 10^{-2} + j0,129 \quad [\text{A}]$$

La tensión será:

$$V_{AB} = \mathbf{Z}\mathbf{I}_3 = -j10 \times \frac{1}{325}(11 + j42) \simeq 1,292 - j0,338 \quad [\text{V}]$$

PROBLEMA 4.4

Dado el circuito de c.a. que muestra la figura P4.4, calcular la corriente que circula por la resistencia central.

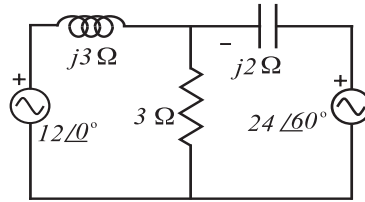


Figura P4.4

Solución

Se trata de un circuito con dos mallas, y la particularidad en este caso es que el generador de la segunda malla está desfasado 60° con respecto al generador de la primera malla que se toma como referencia de fases.

La tensión del segundo generador es:

$$\mathbf{V}_2 = 24e^{j60^\circ} = 24(\cos 60^\circ + j \sin 60^\circ) = 12 + j12\sqrt{3}$$

Las ecuaciones del sistema, considerando que las corrientes de malla tienen el sentido del movimiento de las agujas del reloj, sentido horario, son:

$$\begin{aligned} 12 &= 3(1+j)\mathbf{I}_1 - 3\mathbf{I}_2 \\ -12(1+j\sqrt{3}) &= -3\mathbf{I}_1 + (3-j2)\mathbf{I}_2 \end{aligned}$$

La corriente que circula por la resistencia de $3\ \Omega$ es la diferencia entre las dos corrientes de malla, por tanto debemos resolver el sistema de ecuaciones para obtener las dos intensidades de malla. Utilizando el método de Cramer,

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 12 & -3 \\ -12(1+j\sqrt{3}) & (3-j2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3(1+j) & -3 \\ -3 & (3-j2) \end{vmatrix}} = \frac{-36j\sqrt{3} - j24}{6+j3}$$

$$\mathbf{I}_1 \simeq -(5,757 + j11,514)$$

La corriente $\mathbf{I}_2$ será:

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3(1+j) & 12 \\ -3 & -12(1+j\sqrt{3}) \end{vmatrix}}{6+j3} = \frac{(36-36j)\sqrt{3} - 36j}{6+j3}$$

$$\mathbf{I}_2 \simeq 1,757 - j17,217$$

Dado el signo de la corriente $\mathbf{I}_1$, obtenemos la corriente en la resistencia de $3\ \Omega$ de la forma siguiente:

$$\frac{12\sqrt{3} - j12(\sqrt{3} + 1)}{2 + j} + j\frac{12\sqrt{3} + 8}{2 + j}$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1 \simeq (1,757 - j17,217) + (5,757 + j11,514)$$

$$\mathbf{I} \simeq 7,514 - j5,703$$

Es decir, la corriente tiene el sentido de $\mathbf{I}_2$.

PROBLEMA 4.5

En el circuito de tres lazos que muestra la figura P4.5 tenemos dos resistencias de $3\ \Omega$. Calcular la relación entre las tensiones que hay en los bornes de dichas resistencias.

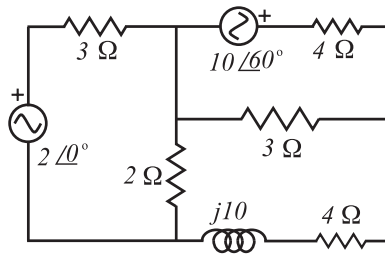


Figura P4.5

Solución

La red de tres mallas tiene un generador, el de la segunda malla, desfasado 60° con respecto al generador de la primera tomado como referencia. La tensión que suministra dicho generador es:

$$\mathbf{V}_2 = 10(\cos 60^\circ + j \sin 60^\circ) = 5(1 + j\sqrt{3})$$

Para calcular la relación entre las tensiones en las resistencias de $3\ \Omega$, tenemos que obtener la corriente en las tres mallas.

El sistema de ecuaciones, considerando las corrientes en sentido horario, es:

$$\begin{aligned}
2 &= 5\mathbf{I}_1 + 0 - 2\mathbf{I}_3 \\
5(1 + j\sqrt{3}) &= 0 + 7\mathbf{I}_2 - 3\mathbf{I}_3 \\
0 &= -2\mathbf{I}_1 - 3\mathbf{I}_2 + (9 + j10)\mathbf{I}_3
\end{aligned}$$

Resolviendo por el método de Cramer obtenemos la corriente de las teres mallas.

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 5(1 + j\sqrt{3}) & 7 & -3 \\ 0 & -3 & (9 + j10) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -3 \\ -2 & -3 & (9 + j10) \end{vmatrix}} = \frac{138 + j(140 + 30\sqrt{3})}{242 + j350}$$

$$\mathbf{I}_1 \simeq 0,555 - j1,019 \times 10^{-2}$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 0 & 5(1 + j\sqrt{3}) & -3 \\ -2 & 0 & (9 + j10) \end{vmatrix}}{242 + j350} = \frac{(217 - 250\sqrt{3}) + j(250 + 205\sqrt{3})}{242 + j350}$$

$$\mathbf{I}_2 \simeq 0,881 + j1,226$$

$$\mathbf{I}_3 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 5(1 + j\sqrt{3}) \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{242 + j350} = \frac{103 + j75\sqrt{3}}{242 + j350}$$

$$\mathbf{I}_3 \simeq 0,389 - j2,548 \times 10^{-2}$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3 = (0,8819 + j1,226) - (0,389 - j2,548 \times 10^{-2})$$

$$\mathbf{I} = 0,493 + j1,251$$

La tensión entre los terminales de la resistencia de 3Ω de la primera malla es:

$$\mathbf{V}_{R1} = 3\mathbf{I}_1 = 3 \times (0,555 - j1,019 \times 10^{-2}) = 1,665 - j0,031$$