

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN	13
 Tema 1. CINEMÁTICA	 21
1. Objetivos del Tema	21
2. Introducción	21
3. Sistemas de referencia en reposo relativo	22
3.1. Relación de las coordenadas de un punto en un plano en dos sistemas de referencia	22
3.2. Posiciones en el espacio tridimensional	26
3.3. La matriz de rotación tridimensional	30
4. Posición, velocidad y aceleración de una partícula puntual	34
5. Sistemas de referencia en movimiento relativo	37
5.1. Transformación de coordenadas entre sistemas de referencia en movimiento relativo	38
5.2. Transformación de velocidades entre sistemas de referencia en movimiento relativo	38
5.3. Interpretación física de la velocidad angular	43
5.4. Aceleración angular	52
5.5. Transformación de aceleraciones entre sistemas de referencia en movimiento relativo	53
6. Resumen del Tema	56

Tema 2. LA DINÁMICA DE NEWTON	59
1. Objetivos del Tema	59
2. Introducción	59
3. Leyes de Newton	60
4. Tipos de fuerzas	66
5. Diagramas de fuerzas	70
6. La segunda ley de Newton es una ecuación diferencial	77
7. La dinámica de Newton en sistemas no inerciales	89
8. La Tierra como sistema no inercial	97
9. Resumen del tema	111
 Tema 3. LA GEOMETRÍA DE SISTEMAS DE PARTÍCULAS	 115
1. Objetivos del Tema	115
2. Introducción	115
3. Posición del centro de masas	116
4. Tensor de inercia de un sistema de partículas	119
4.1. Tensor de inercia de cuerpos planos	124
5. Transformación del tensor de inercia al cambiar de sistema de referencia	127
5.1. Teorema de Steiner	128
5.2. Ejes principales	131
6. Resumen del Tema	143
 Tema 4. LA DINÁMICA DE SISTEMAS DE PARTÍCULAS	 147
1. Objetivos del Tema	147
2. Introducción	147

3. Dinámica de un sistema de partículas	148
4. Teoremas de conservación	150
4.1. Conservación del momento lineal	150
4.2. Conservación del momento angular	152
4.3. Conservación de la energía	156
5. Colisiones	159
6. Transformación de $\mathbf{P}, \mathbf{L}, T$ al cambiar de sistema de referencia	164
6.1. Transformación al sistema de referencia de centro de masas	168
7. Resumen del Tema	171
 Tema 5. EL SÓLIDO RÍGIDO	 175
1. Objetivos del Tema	175
2. ¿Qué es un sólido rígido?	175
3. Momento angular y energía cinética de un sólido rígido	177
4. ¿Cómo se mueve un sólido rígido?	179
5. Ángulos de Euler	182
6. Ejemplos del movimiento de sólidos rígidos	186
6.1. Sólido libre que gira a velocidad angular constante	186
6.2. Cuando se conserva el momento angular	187
6.3. Eje de rotación fijo coincidiendo con un eje de simetría del sólido .	190
6.4. Eje de rotación móvil y paralelo al eje de simetría	192
6.5. Eje de rotación fijo que no es eje de simetría	195
6.6. Cuerpo axisimétrico libre	207
6.7. Peonza axisimétrica con un punto fijo *	214
7. Resumen del Tema	223

Tema 6. GRAVITACIÓN Y FUERZAS CENTRALES	225
1. Objetivos del Tema	225
2. Gravitación universal	225
3. Concepto de campo de fuerzas.	228
4. Campos de fuerzas conservativos	229
5. Campos de fuerza centrales.	235
5.1. Los campos centrales conservan la energía	235
5.2. Los campos centrales conservan el momento angular	238
6. Forma diferencial de la ley de la gravitación	240
7. Calculando el campo gravitatorio de una distribución de masas	244
8. Movimiento de una partícula en un campo central	249
8.1. Solución de las ecuaciones de movimiento	253
8.2. Ecuación de la trayectoria.	255
9. Movimiento en un campo gravitatorio: El problema de Kepler	256
9.1. Leyes de Kepler.	263
10. Masa reducida.	265
11. Resumen del Tema.	269
 Tema 7. MECÁNICA ANALÍTICA	 273
1. Objetivos del Tema	273
2. Introducción.	273
3. El principio de Hamilton da lugar a $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$	274
4. Las ecuaciones de Euler-Lagrange son invariantes bajo cambio de coordenadas *.	279
5. Dinámica lagrangiana en sistemas no inerciales*.	286
6. Ligaduras.	288

7. Variables conservadas.	294
8. Teorema de Noether *	298
9. Ecuaciones de Hamilton	302
10. Resumen del Tema.	308

ÍNDICE ANALÍTICO	309
------------------	-----

Colisión con un sólido rígido

Una partícula de masa $m/2$ que se desliza con velocidad $\mathbf{v} = v_0 \mathbf{e}_x$ choca con otra partícula de igual masa que se encuentra unida a tres partículas de masa m por varillas rígidas y sin masa, formando un cuadrado de lado a , tal como se ilustra en la figura 5.3. Inicialmente el conjunto formado por las partículas que configuran el cuadrado se encuentra en reposo. Después del choque las partículas de masa $m/2$ permanecen unidas. Calcular la velocidad del centro de masas del sistema, la velocidad angular con que rota el sistema alrededor del centro de masas y la velocidad de cada una de las cuatro partículas, justo después del choque.

Elegimos un sistema de referencia con origen en el centro del cuadrado. En el momento de la colisión, el centro de masas del sistema estará precisamente en el origen de coordenadas. Tomamos los ejes de forma que el cuadrado esté contenido en el plano XY y por tanto el eje Z es perpendicular al plano del papel. Es evidente que el movimiento tiene lugar en el plano XY .

Calculemos en primer lugar la velocidad del centro de masas. Antes de la colisión, la velocidad del centro de masas $\mathbf{V}_{\text{cm}}$ está dada por

$$\mathbf{V}_{\text{cm}} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{v}{8} \mathbf{e}_x$$

Como en una colisión sólo hay fuerzas internas, el momento lineal total $\mathbf{P} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = M \mathbf{V}_{\text{cm}}$ se conserva, y por tanto la velocidad del centro de masas es la misma antes y después de la colisión.

Veamos ahora el momento angular, que también se conserva en una colisión. El momento angular $\mathbf{L}$ está dado por la ecuación (5.1)

$$\mathbf{L} = M \mathbf{R}_{\text{cm}} \times \mathbf{V}_{\text{cm}} + \mathbf{I}_{\text{cm}}'' \boldsymbol{\omega}$$

Si elegimos el origen de tiempo cuando $\mathbf{R}_{\text{cm}}(t=0) = 0$ (es decir, en el instante de colisión), entonces en cualquier otro momento tendremos $\mathbf{R}_{\text{cm}}(t) = \mathbf{V}_{\text{cm}} t$. De manera que $\mathbf{R}_{\text{cm}} \times \mathbf{V}_{\text{cm}} = 0$ y el momento angular del sistema de partículas con respecto al sistema de coordenadas elegido coincide con el momento angular con respecto al centro de masas. (Notemos que el cm *se mueve* con respecto al sistema elegido y que, en principio, el momento angular no tendría por qué coincidir con el momento angular con respecto al cm). En $t=0$ además $\mathbf{I}_{\text{cm}}'' = \mathbf{I} - \mathbf{I}_M = \mathbf{I}$ ya que $\mathbf{I}_M = 0$.

En un instante justo anterior a la colisión el momento angular del sistema total sólo tiene contribución de la partícula que se mueve, que denominamos partícula 0,

$$\mathbf{L} = \sum_{i=0}^4 \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \frac{m}{2} \mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0$$

donde $\mathbf{r}_0 = (-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0)$ y $\mathbf{v}_0 = (v, 0, 0)$. Por tanto,

$$\mathbf{L} = -\frac{a}{2} \frac{m}{2} v (0, 0, 1). \quad (5.36)$$

Para calcular el momento angular después de la colisión tenemos que calcular el momento de inercia respecto al cm. Las coordenadas de las partículas son $\mathbf{r}_1 = a (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, $\mathbf{r}_2 = a (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$, $\mathbf{r}_3 = a (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$, $\mathbf{r}_4 = a (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$. El tensor de inercia toma la forma

$$\mathbf{I}_{\text{cm}}'' = ma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (5.37)$$

Así el momento angular después de la colisión es

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}_{\text{cm}}'' \boldsymbol{\omega} = ma^2 (\omega_x, \omega_y, 2\omega_z) \quad (5.38)$$

Igualando el momento angular antes y después del choque obtenemos finalmente que la velocidad angular es

$$\boldsymbol{\omega} = -\left(0, 0, \frac{v}{8a}\right)$$

La velocidad de la partícula 1 (superior derecha), por ejemplo, respecto al cm es

$$\mathbf{u}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1 = -\left(0, 0, \frac{v}{8a}\right) \times \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right) = \frac{v}{16} (1, -1, 0)$$

La velocidad de esta partícula en el instante posterior a la colisión se obtiene sumando la velocidad del cm de manera que

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{V}_{\text{cm}} = \frac{v}{16} (1, -1, 0) + \frac{v}{8} (1, 0, 0) = \frac{v}{16} (3, -1, 0)$$

El cálculo de las velocidades de las otras tres masas es idéntico a éste.

6.3. Eje de rotación fijo coincidiendo con un eje de simetría del sólido

El movimiento de una polea, por ejemplo, se caracteriza porque su rotación es alrededor de un eje fijo en el espacio y que además es eje de simetría del sólido. En este caso, la resolución del movimiento es relativamente sencilla. Siempre podemos elegir el sistema inercial S con su eje Z en el eje de rotación. El sistema de ejes principales S' , al ser el eje de rotación un eje de simetría, también tendrá uno de sus ejes coincidiendo con el eje Z de S . Por tanto, podemos elegir el eje Z' a lo largo del eje de simetría y rotación. Como el centro de masas está en el eje de simetría y éste es fijo, tenemos libertad de poner los orígenes de S y S' en el centro de masas, con lo cual $\mathbf{R}_{\text{cm}} = 0$. Como la rotación de S' respecto a S es del tipo (1.77), la velocidad angular con respecto a S tendrá por componentes $\boldsymbol{\omega}(t) = (0, 0, \omega(t))$ donde $\omega(t)$ es una función, por el momento desconocida, del tiempo. Por lo que vimos en el ejemplo de la rotación alrededor de un eje fijo del Tema 1, sabemos que la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}'(t)$ en el sistema S' tiene también las mismas componentes $\boldsymbol{\omega}'(t) = (0, 0, \omega(t))$. La aceleración angular está dada por $\dot{\boldsymbol{\omega}}(t) = (0, 0, \dot{\omega}(t))$.

Con esta información, las ecuaciones de Euler (5.16) toman la forma

$$0 = N'_x{}^{\text{ext}}(t) \quad (5.39a)$$

$$0 = N'_y{}^{\text{ext}}(t) \quad (5.39b)$$

$$I'_{zz}\dot{\omega}(t) = N'_z{}^{\text{ext}}(t) \quad (5.39c)$$

Es decir, la única forma de tener una rotación de este tipo es que sólo exista momento de las fuerzas externas a lo largo del eje Z . Por supuesto, al estar $\mathbf{N}'^{\text{ext}}$ a lo largo del eje Z (y Z') y tener $\mathbf{R}_{\text{cm}} = 0$, las componentes de este vector son idénticas en los dos sistemas de coordenados S y S' , es decir $\mathbf{N}^{\text{ext}} = \mathbf{N}'^{\text{ext}}$.

Las ecuaciones de Euler describen la variación del momento angular en el sistema S' solidario al sólido. En el caso en que el eje de rotación sea fijo y de simetría, podemos obtener la misma ecuación (5.39c) partiendo de la ecuación (5.8), que describe la variación del momento angular con respecto al sistema inercial S con origen en el centro de masas. Cuando el eje de rotación es fijo y de simetría, el momento angular y la energía cinética dadas en las ecuaciones (5.6) toman la forma

$$\mathbf{L}(t) = \mathcal{R}^T(t) \mathbf{I}'_D \boldsymbol{\omega}'(t) = I'_{zz} \omega(t) \mathbf{e}_z \quad (5.40a)$$

$$T(t) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}'(t) \mathbf{I}'_D \boldsymbol{\omega}'(t) = \frac{1}{2} I'_{zz} \omega^2(t) \quad (5.40b)$$

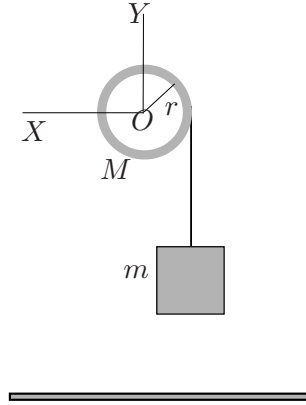


Figura 5.4. Masa que baja por la acción de un volante.

donde hemos usado en la primera ecuación que para la matriz dada en (1.77) $\mathcal{R}^T \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z$. Vemos que cuando el eje de rotación es fijo y de simetría, el momento angular y la velocidad angular son vectores paralelos. La ecuación de movimiento (5.8) se reduce a

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = I'_{zz} \dot{\omega}(t) \mathbf{e}_z = N_z \mathbf{e}_z \quad (5.41)$$

Este resultado evidentemente coincide con las ecuaciones de Euler (5.39). Esta ecuación dice que el momento de la fuerza o torque es paralelo al eje de giro y es igual al momento de inercia respecto al mismo eje multiplicado por la aceleración angular. Nótese que la única componente del momento de inercia que interviene en la ecuación de movimiento es el momento de inercia respecto al eje de giro, I'_{zz} . Por la coincidencia de los orígenes de los dos sistemas S y S' en este ejemplo y por la coincidencia de ambos ejes Z y Z' , precisamente I'_{zz} coincide con el correspondiente en el sistema S , I_{zz} .

Movimiento de un volante

Una forma de bajar una masa m desde una altura h con velocidad controlada es utilizando un volante (polea con la masa concentrada en el perímetro) de masa M y radio r que gira alrededor de un eje horizontal que pasa por su centro O , como se indica en la figura 5.4. Calcular la aceleración de caída en función de la masa M .

El centro de masas del volante se encuentra en O . Tomemos dicho punto como

origen del sistema de referencia, siendo el eje Z el eje de rotación. La velocidad angular del volante sólo tiene componente z y el tensor de inercia del volante para este sistema de referencia es diagonal, de forma que según la ecuación (5.40a) el momento angular es

$$\mathbf{L} = (0, 0, I_{zz}\omega) \quad (5.42)$$

donde $I_{zz} = Mr^2$ ya que toda la masa está concentrada en el perímetro. La fuerza externa que actúa sobre el volante es la tensión $\mathbf{T}$ de la cuerda sobre el borde del volante, por tanto, el momento externo es

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{T} = (0, 0, rT) \quad (5.43)$$

Sustituyendo en la ecuación (5.41) tenemos

$$Mr\alpha = T \quad (5.44)$$

donde hemos llamado α a la aceleración angular. La aceleración angular del volante y la aceleración lineal del cuerpo están relacionadas. En efecto en un intervalo de tiempo Δt , el volante ha girado un ángulo $\Delta\theta$ radianes mientras que la masa se ha movido una distancia $\Delta r = r\Delta\theta$ (por definición de radián). De manera que tenemos que $a = \alpha r$. Por otra parte, la segunda ley sobre la masa establece que

$$mg - T = ma \quad (5.45)$$

de manera que eliminando T de (5.44) y (5.45) obtenemos que la aceleración con que cae la masa m es

$$a = \frac{g}{1 + M/m} \quad (5.46)$$

que está comprendida entre $a = g/2$ cuando $M = m$ y $a = g$ cuando $M \rightarrow 0$.

6.4. Eje de rotación móvil y paralelo al eje de simetría

Hay un conjunto de problemas en los que un sólido axisimétrico se mueve de forma que el eje de rotación se traslada manteniéndose paralelo al eje de simetría. Estos problemas involucran cilindros o esferas que caen por planos, poleas móviles,