ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN 13

Tema 1. **CINEMÁTICA** 21

1. Objetivos del Tema 21
2. Introducción 21
3. Sistemas de referencia en reposo relativo 22
   3.1. Relación de las coordenadas de un punto en un plano en dos sistemas de referencia 22
   3.2. Posiciones en el espacio tridimensional 26
   3.3. La matriz de rotación tridimensional 30
4. Posición, velocidad y aceleración de una partícula puntual 34
5. Sistemas de referencia en movimiento relativo 37
   5.1. Transformación de coordenadas entre sistemas de referencia en movimiento relativo 38
   5.2. Transformación de velocidades entre sistemas de referencia en movimiento relativo 38
   5.3. Interpretación física de la velocidad angular 43
   5.4. Aceleración angular 52
   5.5. Transformación de aceleraciones entre sistemas de referencia en movimiento relativo 53
6. Resumen del Tema 56

Tema 2. **La dinámica de Newton** 59

1. Objetivos del Tema 59
2. Introducción 59
3. Leyes de Newton 60
4. Tipos de fuerzas 66
5. Diagramas de fuerzas 70
6. La segunda ley de Newton es una ecuación diferencial 77
7. La dinámica de Newton en sistemas no inerciales 89
8. La Tierra como sistema no inercial 97
9. Resumen del tema 111

Tema 3. **La geometría de sistemas de partículas** 115

1. Objetivos del Tema 115
2. Introducción 115
3. Posición del centro de masas 116
4. Tensor de inercia de un sistema de partículas 119
   4.1. Tensor de inercia de cuerpos planos 124
5. Transformación del tensor de inercia al cambiar de sistema de referencia 127
   5.1. Teorema de Steiner 128
   5.2. Ejes principales 131
6. Resumen del Tema 143

Tema 4. **La dinámica de sistemas de partículas** 147

1. Objetivos del Tema 147
2. Introducción 147

3. Dinámica de un sistema de partículas 148
4. Teoremas de conservación 150
4.1. Conservación del momento lineal 150
4.2. Conservación del momento angular 152
4.3. Conservación de la energía 156
5. Colisiones 159
6. Transformación de $\mathbf{P}, \mathbf{L}, T$ al cambiar de sistema de referencia 164
6.1. Transformación al sistema de referencia de centro de masas 168
7. Resumen del Tema 171

Tema 5. **El Sólido Rígido** 175
1. Objetivos del Tema 175
2. ¿Qué es un sólido rígido? 175
3. Momento angular y energía cinética de un sólido rígido 177
4. ¿Cómo se mueve un sólido rígido? 179
5. Ángulos de Euler 182
6. Ejemplos del movimiento de sólidos rígidos 186
6.1. Sólido libre que gira a velocidad angular constante 186
6.2. Cuando se conserva el momento angular 187
6.3. Eje de rotación fijo coincidiendo con un eje de simetría del sólido . 190
6.4. Eje de rotación móvil y paralelo al eje de simetría 192
6.5. Eje de rotación fijo que no es eje de simetría 195
6.6. Cuerpo axisimétrico libre 207
6.7. Peonza axisimétrica con un punto fijo * 214
7. Resumen del Tema 223

Tema 6. **Gravitación y fuerzas centrales** 225

1. Objetivos del Tema 225
2. Gravitación universal 225
3. Concepto de campo de fuerzas. 228
4. Campos de fuerzas conservativos 229
5. Campos de fuerza centrales 235
   5.1. Los campos centrales conservan la energía 235
   5.2. Los campos centrales conservan el momento angular 238
6. Forma diferencial de la ley de la gravitación 240
7. Calculando el campo gravitatorio de una distribución de masas 244
8. Movimiento de una partícula en un campo central 249
   8.1. Solución de las ecuaciones de movimiento 254
   8.2. Ecuación de la trayectoria 255
9. Movimiento en un campo gravitatorio: El problema de Kepler 257
   9.1. Leyes de Kepler 264
10. Masa reducida 265
11. Resumen del Tema. 269

Tema 7. **Mecánica Analítica** 273

1. Objetivos del Tema 273
2. Introducción 273
3. El principio de Hamilton da lugar a $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ 274
4. Las ecuaciones de Euler-Lagrange son invariantes bajo cambio de coordenadas * 279
5. Dinámica lagrangiana en sistemas no inerciales* 286
6. Ligaduras 288

7. Variables conservadas. 294
8. Teorema de Noether * 298
9. Ecuaciones de Hamilton 302
10. Resumen del Tema. 309

Índice analítico 310

TEMA 1

CINEMÁTICA

1. OBJETIVOS DEL TEMA

La **cinemática** es la parte de la mecánica clásica que estudia la descripción del movimiento de los cuerpos sin tener en cuenta las causas que lo producen. El objetivo de este Tema es presentar la descripción matemática del **espacio** y el **tiempo** en la mecánica newtoniana. Introducimos el concepto de sistema de referencia y formulamos cómo se transforman las posiciones, velocidades y aceleraciones de las partículas puntuales en dos sistemas de referencia que, en el caso más general, tienen movimiento relativo de traslación y rotación. En la caracterización de la rotación dependiente del tiempo de un sistema de referencia con respecto a otro aparece de manera natural la matriz velocidad angular y su correspondiente vector dual, la velocidad angular.

2. INTRODUCCIÓN

Para localizar un punto en el espacio un observador necesita tres números o coordenadas. Por ejemplo, puede dar la distancia a la que se encuentra el punto y dos ángulos, o bien la distancia entre el punto y el observador a lo largo de unos ejes. Un **sistema de referencia** consiste en un punto del espacio denominado origen del sistema de referencia y tres ejes perpendiculares entre sí que se intersecan en el origen del sistema de referencia. De esta forma, sabiendo la distancia a lo largo de cada uno de estos ejes podemos localizar cualquier punto del espacio. A estas distancias se las denomina **coordenadas** del punto en dicho sistema de referencia. Como podemos elegir muchos sistemas de referencia distintos, nos interesa encontrar la **transformación de las coordenadas** de un punto en un sistema de referencia en función de las coordenadas del mismo punto en otro sistema de referencia.

Para ilustrar la complejidad del problema que vamos a resolver, imaginemos la siguiente situación. En la Tierra se observa un meteorito que va a impactar en una base que está en la Luna. Desde la Tierra se quiere advertir a los miembros de la base lunar de esta emergencia para que puedan dirigir su rayo-laser-anti-meteoritos y pulverizar el meteorito antes de su impacto. En la superficie de la Tierra el observador tiene un sistema de ejes cartesianos con uno de ellos que va desde el centro de la Tierra al observador, otro que apunta al Norte y un tercer eje perpendicular a los anteriores. Con respecto a estos ejes, el observador en la Tierra puede localizar perfectamente la trayectoria del meteorito. En la base lunar, otro observador ha definido sus ejes de manera análoga a como lo hace el observador terrestre, pero con respecto a la superficie lunar. Con respecto a la Tierra, el sistema de referencia lunar está cambiando todo el rato ya que da vueltas alrededor de sí mismo y de la Tierra. Al mismo tiempo, con respecto a la Luna, el sistema de referencia terrestre también está rotando de forma complicada. Si el observador terrestre le da al observador lunar las coordenadas del meteorito en el sistema de referencia terrestre, ¿qué operaciones tiene que realizar el observador lunar para obtener las coordenadas del meteorito en su propio sistema de referencia? En el presente tema intentaremos dar respuesta a esta pregunta.

3. SISTEMAS DE REFERENCIA EN REPOSO RELATIVO

3.1. Relación de las coordenadas de un punto en un plano en dos sistemas de referencia

Iniciamos esta discusión considerando la localización de puntos en un plano bidimensional ya que este caso es especialmente sencillo y permite una visualización fácil. Posteriormente consideraremos el espacio tridimensional. En un plano, los sistemas de referencia son simplemente dos ejes perpendiculares entre sí. En la figura 1.1 vemos dos sistemas de referencia S y S' en reposo uno respecto a otro. Un punto P arbitrario se localiza en el sistema S con las coordenadas $\mathbf{r} = (x, y)$ y en el sistema S' con las coordenadas $\mathbf{r}' = (x', y')$, donde estas coordenadas son las distancias al origen a lo largo de cada eje, tal y como se indica en el dibujo.

Además, el origen O' del sistema S' tiene coordenadas $\mathbf{R} = (X, Y)$ en el sistema S. Es evidente en la figura que el sistema de ejes S' está rotado (un ángulo θ) y trasladado (con $\mathbf{R}$) con respecto al sistema S. El problema que planteamos es cómo podemos encontrar las coordenadas $\mathbf{r}'$ del punto P en S' si conocemos las coordenadas $\mathbf{r}$ del punto P en el sistema S. Notemos que estas coordenadas cumplen que $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}' + \mathbf{R}$, es decir $x \neq x' + X$, $y \neq y' + Y$ en general.

Podemos descomponer el problema de la relación entre las coordenadas de un

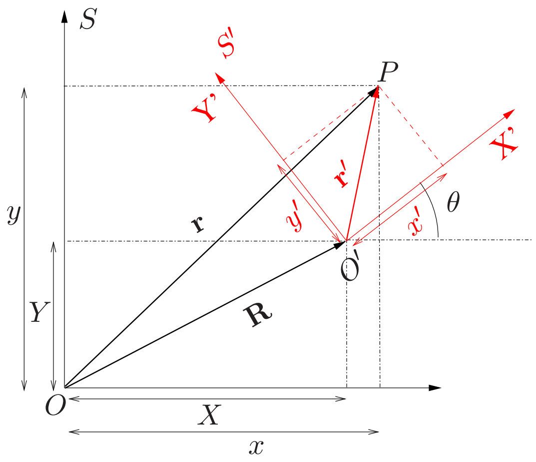

Figura 1.1. Los ejes de los sistemas de referencia S y S' no son paralelos entre sí. Nótese que no se puede calcular la suma $\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{R}$ sumando componente a componente si el vector $\boldsymbol{r}$ se da en el sistema S y el vector $\boldsymbol{r}'$ en S'.

punto P en distintos sistemas de referencia en un problema de traslación y otro de rotación. Para ello, consideremos un tercer sistema de referencia S'' cuyo origen es también O' pero que *no está rotado* con respecto a S tal y como se muestra en la figura 1.2. Las coordenadas del punto P en S'' son $\mathbf{r}'' = (x'', y'')$ y éstas sí que cumplen que

$$\begin{aligned} x &= x'' + X \\ y &= y'' + Y \end{aligned} \tag{1.1}$$

es decir

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}'' + \mathbf{R} \tag{1.2}$$

Veamos cuál es la relación entre las coordenadas de un punto medidas en los sistemas S' y S'' cuyos orígenes coinciden en O' y para los que sólo existe una rotación relativa, en concreto que el sistema S' está rotado un ángulo θ en sentido antihorario medido con respecto a S'' (ver figura 1.3). De la figura 1.3 se deduce que

$$\begin{aligned} x'' + a &= x' \cos\theta \\ y'' - b &= x' \operatorname{sen}\theta \end{aligned} \tag{1.3}$$

donde $a = y' \operatorname{sen}\theta$ y $b = y' \cos\theta$. Ordenando estas ecuaciones tenemos que

$$\begin{aligned} x'' &= x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta \\ y'' &= x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta \end{aligned} \tag{1.4}$$

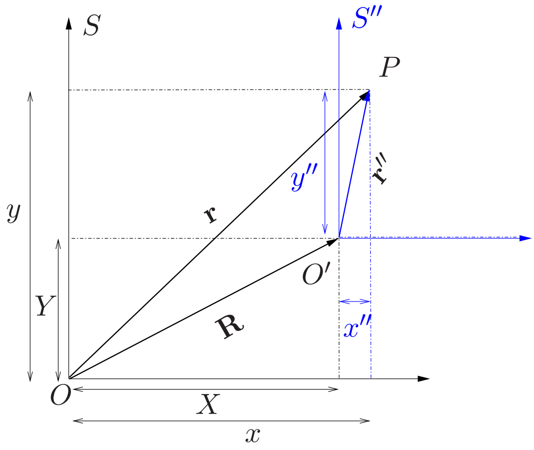

Figura 1.2. Los ejes de los sistemas de referencia S y S'' son paralelos.

De la misma manera tenemos las siguientes relaciones inversas

$$\begin{aligned} x' &= x'' \cos\theta + y'' \operatorname{sen}\theta \\ y' &= -x'' \operatorname{sen}\theta + y'' \cos\theta \end{aligned} \tag{1.5}$$

que podemos escribir en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

y en notación vectorial de la siguiente forma

$$\mathbf{r}' = \mathcal{R}\mathbf{r}'' \tag{1.7}$$

donde $\mathcal{R}$ se denomina matriz de rotación bidimensional. Usando (1.2) y (1.7) podemos ahora relacionar las coordenadas del punto P en el sistema S' con las que tiene en el sistema S

$$\mathbf{r}' = \mathcal{R}(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \tag{1.8}$$

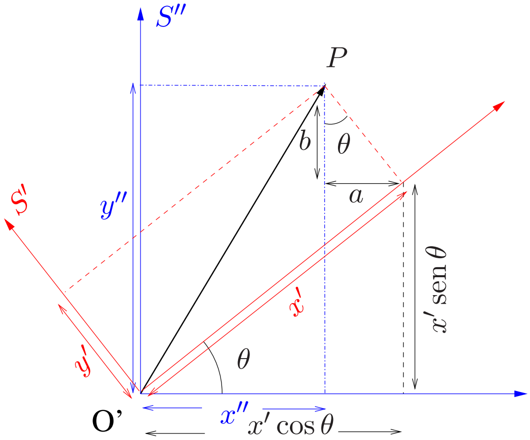

Figura 1.3. Los ejes del sistema de referencia S' están rotados un ángulo θ en sentido antihorario con respecto a los ejes del sistema de referencia S''.

Transformando coordenadas en el plano

Las coordenadas de un punto P son $\mathbf{r} = (2, 3)$ en un sistema de referencia S. Determinar las coordenadas de P en el sistema de referencia S' cuyo origen O' tiene coordenadas $\mathbf{R} = (1, 1)$ en el sistema S, sabiendo que S' tiene sus ejes rotados $\frac{\pi}{4}$ respecto a los de S.

El coordenadas del punto P en S' están dadas por

$$\mathbf{r}' = \mathcal{R}(\mathbf{r} - \mathbf{R})$$

donde la matriz de rotación es

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \\ -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y el vector

$$(\mathbf{r} - \mathbf{R}) = (2, 3) - (1, 1) = (1, 2)$$

Por tanto, las cordenadas de P en el sistema S' son

$$\mathbf{r}' = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1+2 \\ -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

3.2. Posiciones en el espacio tridimensional

Cuando pasamos a tres dimensiones, el hallar por trigonometría la relación entre las coordenadas de un punto en distintos sistemas de referencia resulta bastante laborioso. Por eso es conveniente adoptar un lenguaje ligeramente más abstracto que nos permitirá describir con toda generalidad la situación.

En un sistema cartesiano de tres dimensiones, a cada eje del sistema de referencia S se le asocia un vector unitario $\mathbf{e}_\alpha$ con $\alpha = 1, 2, 3$ cuyas componentes son $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$. Estos vectores unitarios forman una base ortonormal del espacio (es decir, son vectores linealmente independientes y perpendiculares entre sí). Algunas veces estos vectores se denotan por $\mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{e}_x \equiv \mathbf{i}$, $\mathbf{e}_2 \equiv \mathbf{e}_y \equiv \mathbf{j}$, $\mathbf{e}_3 \equiv \mathbf{e}_z \equiv \mathbf{k}$. Para localizar un punto P en el espacio utilizamos un vector de posición que siempre puede escribirse como combinación lineal de los vectores de la base, es decir

$$r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2 + r_3\mathbf{e}_3 = \sum_{\alpha=1}^{3} r_\alpha \mathbf{e}_\alpha \tag{1.9}$$

donde hemos usado el símbolo sumatorio para escribir la suma de términos de manera compacta. Escribiremos $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$ como las coordenadas del punto P en el sistema de referencia S.

Consideremos ahora un sistema de referencia cartesiano S' distinto, *con el mismo origen de coordenadas que el sistema S, pero con los ejes no coincidentes con S*. El referencial S' estará caracterizado por una terna de vectores unitarios $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ que, por definición de sistema de referencia, deben ser ortonormales entre sí. Además, deben formar un triedro orientado, es decir $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}'_2$ donde $\times$ denota el producto vectorial. La condición de ortonormalidad se escribe usando el producto escalar de dos vectores

$$\mathbf{e}'^T_\alpha \mathbf{e}'_\beta = \delta_{\alpha\beta}, \qquad \alpha = 1, 2, 3 \quad \beta = 1, 2, 3 \tag{1.10}$$

donde el símbolo $\delta_{\alpha\beta}$, denominado **delta de Kronecker**, toma valor igual a 1 cuando $\alpha = \beta$ y cero cuando $\alpha \neq \beta$.

A lo largo de este libro, entendemos que $\mathbf{v}$ es un vector columna, es decir, una matriz rectangular (3×1) de tres filas y una columna, mientras que su traspuesto $\mathbf{v}^T$ es un vector fila, es decir, una matriz rectangular (1×3). El producto de matrices $\mathbf{v}^T\mathbf{v}$ de una matriz (1×3) por una (3×1) es simplemente un escalar (una matriz 1×1) que, por definición, es el producto escalar, que denotaremos también por $\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = v_1^2+v_2^2+v_3^2$. El módulo del vector es $|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$. Por otra parte, el producto $\mathbf{v}\mathbf{v}^T$ de una matriz (3×1) por una matriz (1×3) es una matriz (3×3), de manera que es importante tener en cuenta el orden de las matrices.

Así, la ecuación (1.10) es una forma compacta de escribir las *seis* condiciones[1] $\mathbf{e}_1'^T\mathbf{e}_1' = 1$, $\mathbf{e}_1'^T\mathbf{e}_2' = 0$, $\mathbf{e}_1'^T\mathbf{e}_3' = 0$, $\mathbf{e}_2'^T\mathbf{e}_2' = 1$, $\mathbf{e}_2'^T\mathbf{e}_3' = 0$, $\mathbf{e}_3'^T\mathbf{e}_3' = 1$. Los vectores de la base del sistema de referencia S también son ortonormales entre sí y por tanto cumplen a su vez

$$\mathbf{e}_\alpha^T\mathbf{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}, \qquad \alpha = 1,2,3 \quad \beta = 1,2,3 \tag{1.11}$$

Es evidente que podemos expresar cada uno de los vectores de la base del sistema S' como combinación lineal de los vectores de la base del sistema S. Si denotamos los coeficientes de la combinación lineal por $\mathcal{R}_{\alpha\beta}$, tendremos para dos sistemas cartesianos

$$\mathbf{e}_\alpha' = \sum_{\beta=1}^{3}\mathcal{R}_{\alpha\beta}\mathbf{e}_\beta \qquad \alpha = 1,2,3 \tag{1.12}$$

En ocasiones denotaremos por $\{\mathbf{e}\}$ a la base formada por los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ y escribiremos compactamente la ecuación (1.12) en la forma simbólica

$$\{\mathbf{e}'\} = \mathcal{R}\{\mathbf{e}\} \tag{1.13}$$

Podemos multiplicar escalarmente (1.12) por $\mathbf{e}_\gamma$ y obtendremos, usando (1.11) una expresión explícita para los coeficientes $\mathcal{R}_{\alpha\beta}$ dada por

$$\mathcal{R}_{\alpha\gamma} = \mathbf{e}_\alpha'^T\mathbf{e}_\gamma \tag{1.14}$$

Según la interpretación usual del producto escalar, $\mathcal{R}_{\alpha\gamma}$ es, por tanto, simplemente la proyección del vector $\mathbf{e}_\alpha'$ sobre $\mathbf{e}_\gamma$ y viceversa.

[1] Obsérvese que de las 9 ecuaciones dadas con la condición de ortonormalidad sólo hay 6 independientes, pues hay algunas ecuaciones repetidas, en concreto: $\mathbf{e}_1'^T\mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_2'^T\mathbf{e}_1' = 0$, $\mathbf{e}_1'^T\mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_3'^T\mathbf{e}_1' = 0$, $\mathbf{e}_2'^T\mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_3'^T\mathbf{e}_2' = 0$.

Calculando la matriz de rotación

Determinar la rotación que transforma la base de vectores unitarios $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ en la base $\mathbf{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$, $\mathbf{e}'_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)$, $\mathbf{e}'_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2)$.

La matriz de rotación está dada por (1.14) de manera que tenemos que calcular varios productos escalares entre los vectores $\mathbf{e}'_\alpha$ y $\mathbf{e}_\gamma$. Hagamos las primeras componentes $\mathcal{R}_{\alpha\gamma}$ explícitamente.

Desarrollando esta expresión para $\gamma = 1$ y $\alpha = 1, 2, 3$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{11} &= \mathbf{e}'^T_1 \mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\mathcal{R}_{21} &= \mathbf{e}'^T_2 \mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\
\mathcal{R}_{31} &= \mathbf{e}'^T_3 \mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}
\end{aligned} \tag{1.15}$$

De manera análoga podemos ir obteniendo el resto de componentes con el resultado

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

Puede comprobarse fácilmente que si multiplicamos esta matriz por su traspuesta, $\mathcal{R}\mathcal{R}^T$ obtenemos la matriz identidad.

De acuerdo con la definición dada en la ecuación (1.9) un punto P tiene coordenadas (r_1, r_2, r_3) en la base S. De manera análoga en la base del sistema rotado S' que comparte el mismo origen que S, el vector posición del punto P será

$$r'_1\mathbf{e}'_1 + r'_2\mathbf{e}'_2 + r'_3\mathbf{e}'_3 \tag{1.17}$$

donde (r'_1, r'_2, r'_3) son las coordenadas del punto P en la base S'. La relación entre las coordenadas en (1.9) y (1.17) se puede obtener a partir de que, por ser el mismo punto, debe cumplirse

$$\sum_{\alpha=1}^{3} r_\alpha \mathbf{e}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} r'_\alpha \mathbf{e}'_\alpha \tag{1.18}$$

Es decir, el punto P del espacio tiene coordenadas distintas en cada base. Usando (1.12) en la expresión (1.18) tenemos

$$\sum_{\alpha=1}^{3} r_\alpha \mathbf{e}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} r'_\alpha \underbrace{\sum_{\beta=1}^{3} \mathcal{R}_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\beta}_{\mathbf{e}'_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{3} \left[\sum_{\beta=1}^{3} \mathcal{R}_{\beta\alpha} r'_\beta \right] \mathbf{e}_\alpha \tag{1.19}$$

donde hemos intercambiado los índices $\alpha \leftrightarrow \beta$ en la última igualdad (se dice que los índices son mudos). Como ahora a derecha e izquierda de la ecuación tenemos la misma base $\mathbf{e}_\alpha$, los coeficientes de la combinación lineal deben coincidir y, por tanto,

$$r_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3} \mathcal{R}_{\beta\alpha} r'_\beta \qquad \alpha = 1, 2, 3 \tag{1.20}$$

Podemos pensar en la componente $\mathcal{R}_{\alpha\beta}$ como el elemento de la fila α y columna β de una matriz $\mathcal{R}$. De esta forma, la ecuación (1.20) se escribe en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{11} & \mathcal{R}_{21} & \mathcal{R}_{31} \\ \mathcal{R}_{12} & \mathcal{R}_{22} & \mathcal{R}_{32} \\ \mathcal{R}_{13} & \mathcal{R}_{23} & \mathcal{R}_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \end{pmatrix} \tag{1.21}$$

o de forma compacta como

$$\mathbf{r} = \mathcal{R}^T \mathbf{r}' \tag{1.22}$$

donde la matriz $\mathcal{R}$ tiene por elementos las componentes $\mathcal{R}_{\alpha\beta}$ y $\mathcal{R}^T$ es la matriz traspuesta de $\mathcal{R}$ (la que tiene por columnas las filas de $\mathcal{R}$). Veremos en la próxima sección que la relación inversa de (1.22) se puede escribir simplemente como

$$\mathbf{r}' = \mathcal{R}\mathbf{r} \tag{1.23}$$

En esta ecuación (1.23) $\mathbf{r}'$ son las coordenadas de un punto P en la base ortonormal $\{\mathbf{e}'\}$ y $\mathbf{r}$ son las componentes de ese mismo punto en la base $\{\mathbf{e}\}$. Podríamos reinterpretar esta ecuación (1.23) pensando que $\mathbf{r}$ son las coordenadas de un vector

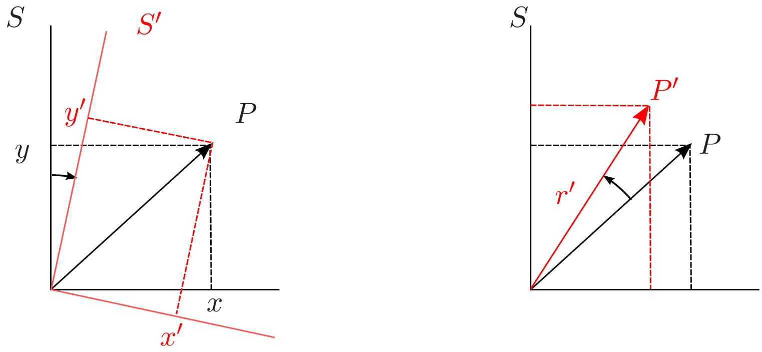

Figura 1.4. El resultado de la rotación $\mathcal{R}\mathbf{r}$ se puede interpretar como una rotación activa, figura de la derecha, o una rotación pasiva, figura de la izquierda.

en la base $\{\mathbf{e}\}$ y $\mathbf{r}'$ las coordenadas de *otro* vector en *la misma* base $\{\mathbf{e}\}$, ver la figura 1.4. A la primera interpretación se la denomina **rotación pasiva** mientras que a la segunda interpretación se le denomina **rotación activa**. Si no decimos lo contrario, a lo largo de este libro nos ceñiremos a la interpretación pasiva ya que siempre hablaremos de componentes de cierto vector en distintos sistemas de referencia.

3.3. La matriz de rotación tridimensional

En esta sección vamos a ver que la matriz de rotación tridimensional $\mathcal{R}$ tiene algunas propiedades interesantes.

El estudiante habrá reconocido de su curso de álgebra que lo que hemos hecho hasta ahora no es más que expresar un vector en distintas bases, sabiendo cuál es la matriz de cambio de base. Lo que vamos a explotar ahora es que las bases son ortonormales, ya que los ejes de un sistema de referencia son perpendiculares entre sí. Esto impone ciertas condiciones a las nueve componentes $\mathcal{R}_{\alpha\beta}$ de la matriz $\mathcal{R}$. De hecho, estas componentes no son todas independientes unas de otras, ya que existen las seis condiciones (1.10). Cabe esperar, por tanto, que sólo hay tres componentes realmente independientes en una matriz de rotación tridimensional. Otra manera de ver esto a partir de la condición de ortogonalidad (1.10) es construyendo los productos escalares y haciendo uso de la definición

(1.12)[2]

$$\mathbf{e}'^T_\alpha \mathbf{e}'_\beta = \sum_{\alpha'=1}^{3}\sum_{\beta'=1}^{3} \mathcal{R}_{\alpha\alpha'}\mathcal{R}_{\beta\beta'}\mathbf{e}^T_{\alpha'}\mathbf{e}_{\beta'} \tag{1.24}$$

Como tanto los vectores $\mathbf{e}_\alpha$ como los $\mathbf{e}'_\alpha$ son ortonormales [ver (1.10) y (1.11)], se cumple que

$$\delta_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha'=1}^{3}\sum_{\beta'=1}^{3} \mathcal{R}_{\alpha\alpha'}\mathcal{R}_{\beta\beta'}\delta_{\alpha'\beta'} = \sum_{\alpha'=1}^{3} \mathcal{R}_{\alpha\alpha'}\mathcal{R}_{\beta\alpha'} \tag{1.25}$$

Dando valores a $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ obtenemos nueve ecuaciones de las cuales tres están repetidas[3], con lo que tendremos seis ecuaciones distintas que deben satisfacer las componentes $\mathcal{R}_{\alpha\beta}$. La condición (1.25) se escribe como

$$\delta_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha'=1}^{3} \mathcal{R}_{\alpha\alpha'}(\mathcal{R}^T)_{\alpha'\beta} \tag{1.27}$$

---

[2] Cuidado con no confundir $\mathbf{e}'_\delta$ con $\mathbf{e}_{\delta'}$. El primer número es la componente $\delta = 1, 2, 3$ del vector $\mathbf{e}'$ mientras que el segundo número es la componente $\delta' = 1, 2, 3$ del vector $\mathbf{e}$.

[3] Podemos desarrollar explícitamente la condición $\delta_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha'=1}^{3} \mathcal{R}_{\alpha\alpha'}\mathcal{R}_{\beta\alpha'} \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad \beta = 1, 2, 3$

$$\alpha = 1,\ \beta = 1 \rightarrow 1 = \sum_{\alpha'=1}^{3} \mathcal{R}_{1\alpha'}\mathcal{R}_{1\alpha'} = \mathcal{R}_{11}\mathcal{R}_{11} + \mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{12} + \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{13} \tag{1.26a}$$

$$\alpha = 1,\ \beta = 2 \rightarrow 0 = \sum_{\alpha'=1}^{3} \mathcal{R}_{1\alpha'}\mathcal{R}_{2\alpha'} = \mathcal{R}_{11}\mathcal{R}_{21} + \mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{22} + \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23} \tag{1.26b}$$

$$\alpha = 1,\ \beta = 3 \rightarrow 0 = \sum_{\alpha'=1}^{3} \mathcal{R}_{1\alpha'}\mathcal{R}_{3\alpha'} = \mathcal{R}_{11}\mathcal{R}_{31} + \mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{32} + \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{33} \tag{1.26c}$$

$$\alpha = 2,\ \beta = 1 \rightarrow 0 = \sum_{\alpha'=1}^{3} \mathcal{R}_{2\alpha'}\mathcal{R}_{1\alpha'} = \mathcal{R}_{21}\mathcal{R}_{11} + \mathcal{R}_{22}\mathcal{R}_{12} + \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13} \tag{1.26d}$$

$$\alpha = 2,\ \beta = 2 \rightarrow 1 = \sum_{\alpha'=1}^{3} \mathcal{R}_{2\alpha'}\mathcal{R}_{2\alpha'} = \mathcal{R}_{21}\mathcal{R}_{21} + \mathcal{R}_{22}\mathcal{R}_{22} + \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{23} \tag{1.26e}$$

$$\alpha = 2,\ \beta = 3 \rightarrow 0 = \sum_{\alpha'=1}^{3} \mathcal{R}_{2\alpha'}\mathcal{R}_{3\alpha'} = \mathcal{R}_{21}\mathcal{R}_{31} + \mathcal{R}_{22}\mathcal{R}_{32} + \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{33} \tag{1.26f}$$

$$\alpha = 3,\ \beta = 1 \rightarrow 0 = \sum_{\alpha'=1}^{3} \mathcal{R}_{3\alpha'}\mathcal{R}_{1\alpha'} = \mathcal{R}_{31}\mathcal{R}_{11} + \mathcal{R}_{32}\mathcal{R}_{12} + \mathcal{R}_{33}\mathcal{R}_{13} \tag{1.26g}$$

$$\alpha = 3,\ \beta = 2 \rightarrow 0 = \sum_{\alpha'=1}^{3} \mathcal{R}_{3\alpha'}\mathcal{R}_{2\alpha'} = \mathcal{R}_{31}\mathcal{R}_{21} + \mathcal{R}_{32}\mathcal{R}_{22} + \mathcal{R}_{33}\mathcal{R}_{23} \tag{1.26h}$$

$$\alpha = 3,\ \beta = 3 \rightarrow 1 = \sum_{\alpha'=1}^{3} \mathcal{R}_{3\alpha'}\mathcal{R}_{3\alpha'} = \mathcal{R}_{31}\mathcal{R}_{31} + \mathcal{R}_{32}\mathcal{R}_{32} + \mathcal{R}_{33}\mathcal{R}_{33} \tag{1.26i}$$

Se puede ver que la ecuación (1.26b) y la (1.26d) son idénticas, la (1.26c) y la (1.26g) también así como la (1.26f) y la (1.26h).

que en forma matricial es

$$\mathcal{R}\mathcal{R}^T = \mathcal{I} \tag{1.28}$$

donde $\mathcal{I}$ es la matriz identidad

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.29}$$

Una matriz que cumple (1.28) se denomina **matriz ortogonal**. También se puede demostrar la igualdad

$$\mathcal{R}^T\mathcal{R} = \mathcal{I} \tag{1.30}$$

Estas ecuaciones (1.28), (1.30) nos dicen que la inversa de una matriz ortogonal es simplemente su traspuesta, es decir

$$\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}^T \tag{1.31}$$

Esta relación es muy útil ya que, en general calcular la inversa de una matriz suele ser laborioso. Para las matrices ortogonales, ese cálculo es sorprendentemente sencillo ya que se reduce a trasponer la matriz.

Observamos ahora que el determinante de una matriz ortogonal es necesariamente igual a 1 o a -1, ya que

$$1 = \det[\mathcal{I}] = \det[\mathcal{R}\mathcal{R}^T] = \det[\mathcal{R}]\det[\mathcal{R}^T] = \det[\mathcal{R}]\det[\mathcal{R}] = (\det[\mathcal{R}])^2$$

de donde $\det[\mathcal{R}] = \pm 1$. En este texto sólo nos interesan las matrices cuyo determinante es $+1$. La razón es que en general las matrices que consideraremos dependen contínuamente del tiempo y en cierto instante inicial van a coincidir con la matriz identidad, cuyo determinante es $+1$. Las matrices ortogonales que cumplen (1.28) y su determinante es $+1$ se denominan matrices de rotación propias o simplemente **matrices de rotación** (las matrices con determinante -1 se denominan matrices de rotación impropias).

Aunque intuitivamente pueda ser evidente que para pasar de un sistema de ejes perpendiculares a otro simplemente necesitamos hacer una rotación de estos ejes, podemos apreciar mejor la denominación de matriz de rotación si vemos cuál es el resultado de aplicar dicha matriz a un vector arbitrario $\mathbf{r}$, es decir, cuando hacemos una rotación activa. Será

$$\mathbf{r}' = \mathcal{R}\mathbf{r} \tag{1.32}$$

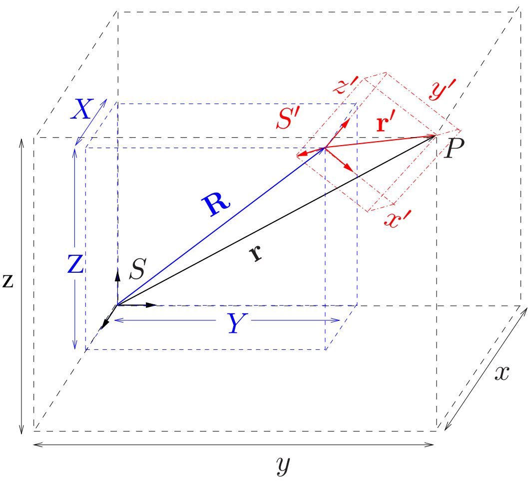

Figura 1.5. S' es un sistema de referencia cuyos ejes están rotados respecto a los de S y cuyo origen está trasladado un vector $\mathbf{R}$.

Si calculamos el módulo del vector transformado $\mathbf{r}'$ y usamos la relación de ortogonalidad (1.28) obtenemos

$$|\mathbf{r}'|^2 = \mathbf{r}'^T\mathbf{r}' = (\mathcal{R}\mathbf{r})^T(\mathcal{R}\mathbf{r}) = \mathbf{r}^T \underbrace{\mathcal{R}^T\mathcal{R}}_{\mathcal{I}} \mathbf{r} = \mathbf{r}^T\mathbf{r} = |\mathbf{r}|^2 \tag{1.33}$$

En esta ecuación (1.33) hemos usado que la traspuesta del producto de dos matrices $(AB)^T$ está dado por B^TA^T. La relación (1.33) nos dice que el vector transformado $\mathbf{r}'$ tiene el mismo módulo que el vector original $\mathbf{r}$. Por tanto, el efecto de aplicar la matriz $\mathcal{R}$ a $\mathbf{r}$ es simplemente cambiar su orientación pero no su módulo, es decir, el efecto es el de *girarlo* un cierto ángulo respecto de algún eje de rotación en el espacio.

Hasta ahora hemos supuesto que los orígenes de los sistemas de referencia coincidían y que S' está rotado con respecto a S. Si los orígenes no coinciden, sino que el origen del sistema S' tiene las coordenadas $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$ con respecto a S como se muestra en la figura 1.5, de manera análoga al resultado bidimensional, la relación entre las coordenadas de un punto en los distintos sistemas de referencia está dada por la expresión

$$\mathbf{r}' = \mathcal{R}(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \tag{1.34}$$

Esta ecuación es extremadamente importante ya que, como veremos a lo largo del libro, se obtiene a partir de ella una cantidad de información enorme acerca de cómo se transforman magnitudes físicas en distintos sistemas de referencia.

El vector $\mathbf{R}$, que nos da las coordenadas del origen de S' con respecto a S, y la matriz $\mathcal{R}$, que nos da la orientación relativa de los ejes de S' con respecto a S, caracterizan completamente al sistema de referencia S' con respecto a S. La relación (1.34) es el diccionario de traducción de las coordenadas de un punto P medidas en cada uno de los dos sistemas de referencia (S y S'). La relación inversa

$$\mathbf{r} = \mathcal{R}^T \mathbf{r}' + \mathbf{R} \tag{1.35}$$

nos permite saber las coordenadas del punto P en S si sabemos las coordenadas en S'. Para obtener (1.35) basta con multiplicar (1.34) por la izquierda con $\mathcal{R}^T$ y usar (1.30).

4. POSICIÓN, VELOCIDAD Y ACELERACIÓN DE UNA PARTÍCULA PUNTUAL

Con respecto a un sistema referencial, el movimiento de una partícula puntual en el espacio se puede describir por el **vector posición** $\mathbf{r}(t)$ que va tomando dicha partícula en cada instante de tiempo. Este vector tiene por componentes las coordenadas en cada uno de los ejes del sistema de referencia dado. La **velocidad** instantánea $\mathbf{v}(t)$ de la partícula, medida en el mismo sistema de referencia, se define como la derivada temporal del vector de posición. A veces denotaremos esta derivada con un punto, es decir $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$. La derivada temporal de un vector se define matemáticamente como el siguiente límite

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \tag{1.36}$$

En la figura 1.6 vemos que el vector velocidad es un vector que es tangente a la trayectoria seguida por la partícula. De la misma manera, se define el vector **aceleración** instantánea $\mathbf{a}(t)$ de la partícula, medida en el mismo sistema de referencia, como la derivada temporal del vector velocidad

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \tag{1.37}$$

Es obvio que la aceleración es la segunda derivada temporal de la posición

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} \tag{1.38}$$

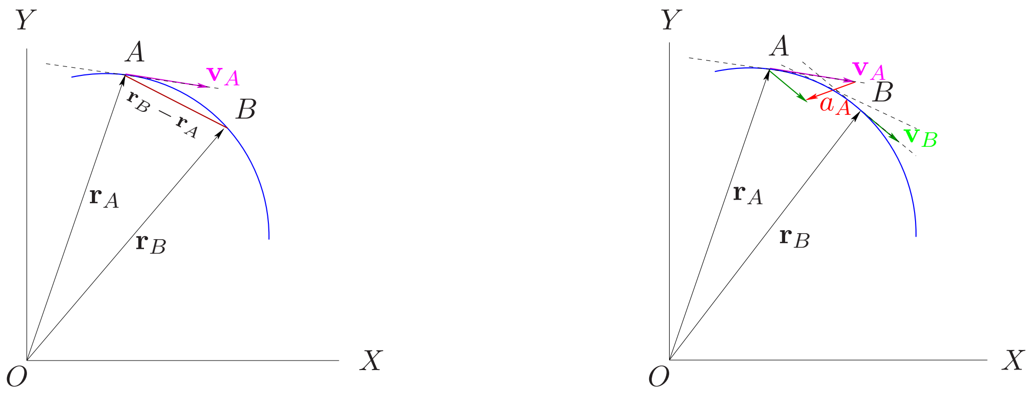

Figura 1.6. En el plano XY, la partícula sigue la trayectoria dada por la curva genérica AB. En la figura de la izquierda se ve cómo el vector velocidad en A es tangente a la curva. En la figura de la derecha se representa el vector velocidad instantánea en los distintos puntos y se muestra, de forma aproximada, el vector aceleración instantánea en el punto A.

En ocasiones escribiremos la aceleración con la notación $\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)$.

Dada la posición de una partícula en el tiempo, hallar su velocidad y aceleración

En cierto sistema referencial, la posición en función del tiempo de una partícula está dada por el vector $\mathbf{r}(t) = (R\cos\omega t, R\,\mathrm{sen}\,\omega t, 0)$. ¿Cuál es la velocidad y aceleración de esta partícula?

La trayectoria que sigue esta partícula es un circunferencia que está en el plano XY, ya que $\mathbf{r}^2(t) = R^2\cos^2\omega t + R^2\,\mathrm{sen}^2\omega t = R^2$ y, por tanto, la distancia al origen es siempre constante.

La velocidad se obtiene derivando con respecto el tiempo, componente a componente, el vector de posición. Esto nos da

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = (-R\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t, R\omega\cos\omega t, 0) \tag{1.39}$$

El módulo de la velocidad está dado por $v = R\omega$ que es independiente del tiempo. Por tanto el movimiento de la partícula se denomina circular uniforme. Obsérvese que $\mathbf{r}^T(t)\mathbf{v}(t) = 0$, es decir, el vector velocidad es perpendicular al radio vector y, por tanto, la velocidad es tangente a la trayectoria que sigue la partícula. La aceleración será

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt}(t) = (-R\omega^2 \cos\omega t, -R\omega^2 \operatorname{sen}\omega t, 0) \tag{1.40}$$

y vemos que se cumple que $\mathbf{a}(t) = -\omega^2 \mathbf{r}(t)$. Por eso, la aceleración en un movimiento circular uniforme está en la dirección del radio vector, con signo opuesto, es decir, apunta al centro de la circunferencia.

Dada la aceleración (constante), hallar la velocidad y posición

Supongamos que una partícula tiene una aceleración constante $\mathbf{a}$ en cierto sistema de referencia S. ¿Cuál es la velocidad y posición del cuerpo en función del tiempo?

Este problema es el inverso del ejemplo anterior, en aquel teníamos que derivar y en este tenemos que integrar. Como la derivada de la velocidad es la aceleración, tenemos que

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) = \mathbf{a} \tag{1.41}$$

Esto es una ecuación vectorial y para cada una de las tres componentes tenemos una ecuación. Si integramos con respecto al tiempo cada componente podemos escribir

$$\int_0^t dt' \frac{d}{dt'}\mathbf{v}(t') = \int_0^t dt' \mathbf{a} \tag{1.42}$$

Usando el teorema fundamental del cálculo podemos hacer la integral de la izquierda, mientras que la integral de la derecha es inmediata

$$\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(0) = \mathbf{a}t \tag{1.43}$$

Podemos comprobar sin más que derivar que esta es la solución de la ecuación (1.41). Como la velocidad es la derivada de la posición, tenemos que

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + \mathbf{a}t \tag{1.44}$$

De nuevo podemos integrar ambos miembros de esta ecuación con el resultado

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0) = \mathbf{v}(0)t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2 \tag{1.45}$$

es decir

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \mathbf{v}(0)t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2 \tag{1.46}$$

Es decir, dadas la posición $\mathbf{r}(0)$ y velocidad $\mathbf{v}(0)$ iniciales sabemos cómo será la posición y velocidad en todo tiempo. En concreto, reconocemos para cada una de las componentes la ecuación de un movimiento uniformemente acelerado.

5. SISTEMAS DE REFERENCIA EN MOVIMIENTO RELATIVO

Hemos visto cómo un punto del espacio puede representarse con distintas coordenadas dependiendo del sistema de referencia elegido. Hasta ahora hemos considerado que los sistemas de referencia estaban en reposo relativo y no cambiaban en el tiempo, es decir el vector $\mathbf{R}$ y la matriz $\mathcal{R}$ que nos da la relación entre los sistemas S' y S eran independientes del tiempo. La situación se vuelve interesante cuando tenemos un movimiento relativo del sistema S' con respecto del sistema S, de forma que tenemos que, tanto el vector relativo $\mathbf{R}(t)$ como la matriz de rotación relativa $\mathcal{R}(t)$ dependen del tiempo.

Conviene, en este punto, detenerse a pensar en cómo se conceptualiza el **tiempo** en la mecánica newtoniana. En la descripción newtoniana del movimiento, está implícita la noción de que todos los observadores comparten el mismo valor del tiempo, que corre para todos ellos por igual. El tiempo en la mecánica newtoniana es un parámetro común a todos los observadores, es decir, todos ellos están de acuerdo en que el valor que marca un reloj en un sistema de referencia es el mismo que marcaría cualquier reloj en cualquier sistema de referencia (supuesto que inicialmente estuvieran sincronizados). Esta noción absoluta del tiempo se debe modificar cuando las velocidades relativas son cercanas a la velocidad de la luz. En este caso, la formulación apropiada está dada por la teoría de la relatividad que postula que cada observador no sólo tiene sus propios ejes de referencia espaciales con respecto a los que mide las posiciones de los puntos sino que además tiene un eje temporal propio y distinto en general al de los demás observadores.

5.1. Transformación de coordenadas entre sistemas de referencia en movimiento relativo

Supongamos que tenemos una partícula puntual que se mueve con respecto al sistema de coordenadas S. Sus coordenadas en el sistema S vienen representadas por un vector $\mathbf{r}(t)$ que dependerá del tiempo. De la misma manera, las coordenadas de ese punto en el sistema S' estarán representadas por el vector $\mathbf{r}'(t)$. La relación (1.34) sigue siendo válida en cada instante de tiempo, por lo que tendremos

$$\mathbf{r}'(t) = \mathcal{R}(t)[\mathbf{r}(t) - \mathbf{R}(t)] \tag{1.47}$$

La relación inversa está dada por

$$\mathbf{r}(t) = \mathcal{R}^T(t)\mathbf{r}'(t) + \mathbf{R}(t) \tag{1.48}$$

5.2. Transformación de velocidades entre sistemas de referencia en movimiento relativo

Como las coordenadas de una partícula dependen del sistema de referencia elegido, también las componentes del vector velocidad dependerán del sistema de referencia utilizado. Nos preguntamos ahora por la relación que existe entre la velocidad $\mathbf{v}$ de la partícula con respecto a S y la velocidad $\mathbf{v}'$ de la misma partícula con respecto a S' que se mueve respecto a S. Si derivamos la ecuación (1.47) con respecto al tiempo tendremos

$$\mathbf{v}'(t) = \dot{\mathcal{R}}(t)[\mathbf{r}(t) - \mathbf{R}(t)] + \mathcal{R}(t)[\mathbf{v}(t) - \mathbf{V}(t)] \tag{1.49}$$

donde $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$ es la velocidad en el instante t de la partícula medida en el sistema referencial S, $\mathbf{v}'(t) = \dot{\mathbf{r}}'(t)$ es la velocidad en el instante t de la partícula medida en el sistema S', y $\mathbf{V}(t) = \dot{\mathbf{R}}(t)$ es la velocidad del origen del sistema de referencia S' medida con respecto a S. Podemos insertar la ecuación (1.28) para transformar convenientemente el primer sumando del término derecho de la ecuación (1.49) (omitimos la dependencia en t por simplicidad)

$$\dot{\mathcal{R}}(\mathbf{r} - \mathbf{R}) = \dot{\mathcal{R}}\underbrace{\mathcal{R}^T\mathcal{R}}_{\mathcal{I}}(\mathbf{r} - \mathbf{R}) = \dot{\mathcal{R}}\mathcal{R}^T\underbrace{\mathcal{R}[\mathbf{r} - \mathbf{R}]}_{\mathbf{r}'} = \dot{\mathcal{R}}\mathcal{R}^T\mathbf{r}' \tag{1.50}$$

donde en la última igualdad hemos hecho uso de la ecuación (1.47). La combinación $\dot{\mathcal{R}}\mathcal{R}^T$ es la transpuesta de $\mathcal{R}\dot{\mathcal{R}}^T$ ya que

$$(\mathcal{R}\dot{\mathcal{R}}^T)^T = (\dot{\mathcal{R}}^T)^T\mathcal{R}^T = \dot{\mathcal{R}}\mathcal{R}^T \tag{1.51}$$

La matriz $\mathcal{R}\dot{\mathcal{R}}^T$ tiene propiedades interesantes y por tanto merece un nombre propio que es el de **matriz de velocidad angular instantánea $\hat{\boldsymbol{\omega}}'(t)$**

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}'(t) \equiv \mathcal{R}(t)\dot{\mathcal{R}}^T(t) \tag{1.52}$$

de forma que la ecuación (1.49) deviene

$$\mathbf{v}' = \hat{\boldsymbol{\omega}}'^T\mathbf{r}' + \mathcal{R}[\mathbf{v} - \mathbf{V}] \tag{1.53}$$

De manera alternativa y equivalente, podemos derivar con respecto al tiempo la ecuación (1.48) con lo que obtenemos

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathcal{R}}^T(t)\mathbf{r}'(t) + \mathcal{R}^T(t)\mathbf{v}'(t) + \mathbf{V}(t) \tag{1.54}$$

Esta ecuación nos da la velocidad $\mathbf{v}(t)$ de la partícula en el sistema S en función de la velocidad $\mathbf{v}'(t)$ en el sistema S. Podemos ahora introducir la siguiente matriz de velocidad angular $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ (¡que es distinta a $\hat{\boldsymbol{\omega}}'$ en (1.52)!)

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}(t) \equiv \dot{\mathcal{R}}^T(t)\mathcal{R}(t) \tag{1.55}$$

de forma que la ecuación (1.54) se puede escribir, junto con (1.48)

$$\mathbf{v} = \hat{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{r} - \mathbf{R}) + \mathcal{R}^T\mathbf{v}' + \mathbf{V} \tag{1.56}$$

Las matrices $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ y $\hat{\boldsymbol{\omega}}'$ de velocidad angular son matrices antisimétricas[4], es decir

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\omega}}^T &= -\hat{\boldsymbol{\omega}} \\ \hat{\boldsymbol{\omega}}'^T &= -\hat{\boldsymbol{\omega}}' \end{aligned} \tag{1.57}$$

Para probar (1.57), derivamos la transpuesta de la identidad (1.28) con respecto al tiempo y obtenemos que

$$0 = \frac{d}{dt}\mathcal{I} = \frac{d}{dt}\left(\mathcal{R}\mathcal{R}^T\right) = \dot{\mathcal{R}}\mathcal{R}^T + \mathcal{R}\dot{\mathcal{R}}^T \tag{1.58}$$

y también

$$0 = \frac{d}{dt}\mathcal{I} = \frac{d}{dt}\left(\mathcal{R}^T\mathcal{R}\right) = \dot{\mathcal{R}}^T\mathcal{R} + \mathcal{R}^T\dot{\mathcal{R}} \tag{1.59}$$

[4] Una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ de elementos a_{ij} es antisimétrica si $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo i, j. En particular, $a_{ii} = 0$.

Usando la identidad de matrices $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$, observamos que podemos escribir (1.58) y (1.59) como

$$\begin{aligned}(\mathcal{R}\dot{\mathcal{R}}^T)^T &= -\mathcal{R}\dot{\mathcal{R}}^T \\ (\dot{\mathcal{R}}^T\mathcal{R})^T &= -\dot{\mathcal{R}}^T\mathcal{R}\end{aligned} \tag{1.60}$$

que no es más que (1.57).

En una matriz antisimétrica la fila i-ésima coincide con la columna i-ésima cambiada de signo. En tres dimensiones las matrices antisimétricas sólo tienen tres componentes independientes ya que son de la forma

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \tag{1.61}$$

La diagonal de una matriz antisimétrica siempre se anula porque $\hat{\omega}_{ii} = -\hat{\omega}_{ii}$ y el único número igual a su opuesto es el cero. Escribir la matriz antisimétrica en la forma particular (1.61) nos permite asociar a la matriz velocidad angular $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ un **vector velocidad angular**[5] $\boldsymbol{\omega}$ de la forma

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) \tag{1.62}$$

Se dice que la matriz antisimétrica $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ y el pseudo vector $\boldsymbol{\omega}$ son **duales** entre sí. De esta forma, multiplicar la matriz antisimétrica $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ por un vector arbitrario $\mathbf{q}$ es equivalente matemáticamente al producto vectorial $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}$, es decir

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{q} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} \tag{1.63}$$

Para probar esta identidad, basta con escribir las componentes del vector $\mathbf{q} = (x, y, z)$ y comparar los siguientes cálculos

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{q} &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y\omega_z + z\omega_y \\ x\omega_z - z\omega_x \\ -x\omega_y + y\omega_x \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -y\omega_z + z\omega_y \\ x\omega_z - z\omega_x \\ -x\omega_y + y\omega_x \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{1.64}$$

[5] Como veremos, el vector velocidad angular se transforma como un vector bajo rotaciones propias (cuyo determinante es 1). Sin embargo *no* se transforma como un vector bajo rotaciones impropias (cuyo determinante es -1). Por esta razón a menudo se denomina a la velocidad angular como pseudovector o vector axial.

donde ambas expresiones coinciden idénticamente. La notación que hemos elegido, en la que la *matriz* antisimétrica $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ tiene un *sombrero* con respecto al *vector* $\boldsymbol{\omega}$ enfatiza la relación dual entre ambos objetos. De manera análoga, la *matriz* antisimétrica $\hat{\boldsymbol{\omega}}'$ y el vector *vector* $\boldsymbol{\omega}'$ serán duales.

Haciendo uso de las expresiones (1.52) y (1.47) vemos que

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}'\mathbf{r}' = \mathcal{R}\dot{\mathcal{R}}^T \underbrace{\mathbf{r}'}_{\mathcal{R}(\mathbf{r}-\mathbf{R})} = \mathcal{R}\underbrace{\dot{\mathcal{R}}^T\mathcal{R}}_{\hat{\boldsymbol{\omega}}}(\mathbf{r}-\mathbf{R}) = \mathcal{R}\hat{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{r}-\mathbf{R}) \tag{1.65}$$

por lo que también tenemos $\hat{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{r}-\mathbf{R}) = \mathcal{R}^T\hat{\boldsymbol{\omega}}'\mathbf{r}'$. Con ello, las expresiones (1.53) y (1.56) dadas en términos de los vectores velocidad angular toman la forma

$$\mathbf{v}' = \mathcal{R}\left[\mathbf{v}-\mathbf{V}-\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{r}-\mathbf{R})\right] \tag{1.66a}$$

$$\mathbf{v} = \mathcal{R}^T\left(\mathbf{v}'+\boldsymbol{\omega}'\times\mathbf{r}'\right)+\mathbf{V} \tag{1.66b}$$

En resumen, así como las ecuaciones (1.34) y (1.35) nos permiten relacionar las coordenadas de una partícula puntual en distintos sistemas de referencia, las ecuaciones (1.66) nos permite relacionar la velocidad $\mathbf{v}$ de la partícula medida con respecto a S con la velocidad $\mathbf{v}'$ de la partícula medida con respecto a S' en cada instante de tiempo, estando ambos sistemas de referencia en movimiento relativo.

Casos particulares de las ecuaciones (1.66):

- Supongamos que los orígenes de S y S' coinciden en todo instante de tiempo, con lo cual $\mathbf{R}=0, \mathbf{V}=0$ y S' simplemente rota con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}(t)$ con respecto a S. Si además para el observador del sistema S' la partícula está en reposo en $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}'_0$, entonces $\mathbf{v}'(t) = 0$. Según la ecuación (1.48), $\mathbf{r}(t) = \mathcal{R}^T(t)\mathbf{r}'_0$, y por tanto, la velocidad de esa partícula (que está rotando solidariamente con S') medida con respecto al referencial S está dada por

  $$\mathbf{v}(t) = \mathcal{R}^T(t)(\boldsymbol{\omega}'(t)\times\mathbf{r}'_0) = \boldsymbol{\omega}(t)\times\mathbf{r}(t) \tag{1.67}$$

  donde hemos usado en la última igualdad que la rotación del producto vectorial de dos vectores es igual que el producto vectorial de los dos vectores rotados, es decir

  $$\mathcal{R}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\mathcal{R}\mathbf{a})\times(\mathcal{R}\mathbf{b}) \tag{1.68}$$

  para dos vectores cualesquiera $\mathbf{a},\mathbf{b}$. Aquí hemos hecho uso de la relación $\mathcal{R}^T(t)\boldsymbol{\omega}'(t) = \boldsymbol{\omega}(t)$ que se deducirá en la próxima sección. La ecuación (1.67)

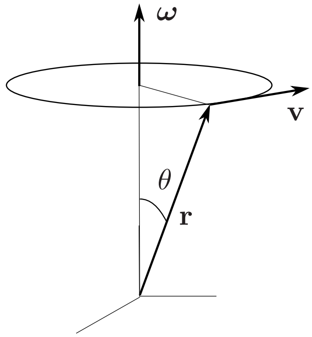

Figura 1.7. Una partícula rota respecto al sistema de referencia S. La velocidad lineal de la partícula está dada por $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$.

nos dice que la velocidad con respecto a S de una partícula que está rotando (es decir que está en reposo en un sistema S' que rota) siempre es perpendicular al plano que forman los vectores posición y velocidad angular. Si $\boldsymbol{\omega}$ es constante, el módulo de la velocidad será

$$v = \omega r \operatorname{sen} \theta \tag{1.69}$$

donde ω es el módulo de $\boldsymbol{\omega}$, r es el módulo de $\mathbf{r}$ y θ es el ángulo que forman $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{r}$, ver figura 1.7

- Si el sistema de referencia S' se mueve con velocidad relativa $\mathbf{V}$ con respecto a S, y no experimenta ninguna rotación relativa más que la que pudiera tener en el instante inicial descrita por $\mathcal{R}(0)$ tendremos $\boldsymbol{\omega}' = 0$. Así, una partícula que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ medida en S se moverá con velocidad $\mathbf{v}'$ en el sistema S' dada por

$$\mathbf{v}' = \mathcal{R}(0)(\mathbf{v} - \mathbf{V}) \tag{1.70}$$

Además, para el caso particular en que ambos sistemas de referencia tengan inicialmente sus respectivos ejes paralelos la matriz de rotación relativa es $\mathcal{R}(0) = \mathcal{I}$ quedando

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V} \tag{1.71}$$

que es la famosa **transformación de Galileo de las velocidades**.

5.3. Interpretación física de la velocidad angular

En esta sección vamos a describir en términos físicos la velocidad angular. Una primera interpretación surge de manera inmediata de la ecuación (1.67) que nos dice cómo se obtiene la velocidad de una partícula que gira, a partir de su velocidad angular. Sin embargo, hemos definido varias matrices y vectores a los que les hemos atribuido el nombre de velocidad angular y conviene entender la relación entre ellas. Así, lo primero que tenemos que hacer es encontrar la relación entre las matrices $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ y $\hat{\boldsymbol{\omega}}'$, y entre sus vectores duales $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\omega}'$. Las dos matrices de velocidad angular $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ y $\hat{\boldsymbol{\omega}}'$ se relacionan simplemente, a partir de sus definiciones (1.52) y (1.55), ya que

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} \equiv \dot{\mathcal{R}}^T \mathcal{R} = \underbrace{\mathcal{R}^T \mathcal{R}}_{\mathcal{I}} \dot{\mathcal{R}}^T \mathcal{R} = \mathcal{R}^T \hat{\boldsymbol{\omega}}' \mathcal{R} \tag{1.72}$$

Nos interesa ahora obtener la relación entre los vectores velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\omega}'$ asociados a estas matrices. Una manera de conseguirlo es sustituir la velocidad $\mathbf{v}'$ de (1.66a) en la ecuación (1.66b) y así obtenemos

$$\mathbf{v} = \mathcal{R}^T \left\{ \mathcal{R} \left[\mathbf{v} - \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{R}) \right] + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}' \right\} + \mathbf{V} \tag{1.73}$$

que simplificando da

$$\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{R}) = \mathcal{R}^T \left(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}' \right) = \left(\mathcal{R}^T \boldsymbol{\omega}' \right) \times \left(\mathcal{R}^T \mathbf{r}' \right) = \mathcal{R}^T \boldsymbol{\omega}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{R}) \tag{1.74}$$

donde hemos usado la relación vectorial (1.68). Como la ecuación (1.74) es válida para cualquier vector $\mathbf{r} - \mathbf{R}$, tiene que cumplirse que

$$\boldsymbol{\omega} = \mathcal{R}^T \boldsymbol{\omega}' \tag{1.75}$$

$$\boldsymbol{\omega}' = \mathcal{R} \boldsymbol{\omega} \tag{1.76}$$

que nos da la relación entre ambos vectores velocidad angular. Vemos que estos vectores se relacionan entre sí tal y como lo hacen las coordenadas del vector posición en distintos sistemas de coordenadas, ver (1.32). Por tanto, *podemos interpretar que $\boldsymbol{\omega}$ son las componentes del vector velocidad angular en el sistema de referencia S y $\boldsymbol{\omega}'$ son las componentes del mismo vector velocidad angular en el sistema de referencia S'.*[6]

---

[6] Cuando dos matrices se relacionan en la forma (1.72) bajo un cambio de base, es porque se corresponden con las componentes de un tensor. Así, $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ y $\hat{\boldsymbol{\omega}}'$ son las componentes del tensor antisimétrico velocidad angular en las bases de S y S'.

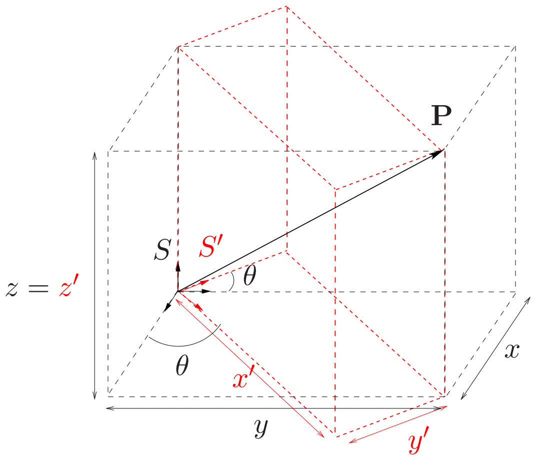

Figura 1.8. S' es un sistema de referencia de ejes rotados con respecto a S un ángulo θ en sentido antihorario alrededor del eje Z.

En general las componentes de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ no son necesariamente iguales a las derivadas con respecto del tiempo de ninguna coordenada. Sin embargo, vamos a ver a continuación que el vector velocidad angular describe lo que intuitivamente entendemos como lo rápidamente que gira un sistema alrededor de un eje de rotación, al menos cuando este eje es fijo.

Rotación alrededor de un eje fijo

Consideremos un sistema de referencia S' cuyo origen coincide con el de S y que tiene con respecto a S la siguiente matriz de rotación

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.77}$$

Es fácil comprobar que ésta es una matriz de rotación, ya que cumple (1.28). Además, si consideramos las coordenadas de un punto en S dadas por $\mathbf{r} = (x, y, z)$, en S' dicho punto tiene como coordenadas $\mathbf{r}' = \mathcal{R}\mathbf{r}$ siendo

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta \\ y' &= -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \\ z' &= z \end{aligned} \tag{1.78}$$

Nótese que las componentes x, y, x', y' se relacionan de la misma forma que en la rotación bidimensional (1.6) porque la matriz de rotación deja invariante la otra coordenada $z = z'$. Se puede ver en la figura 1.8 una representación gráfica. Por tanto, la rotación representada por (1.77) es una rotación de S' con respecto a S alrededor del eje Z común. Imaginemos ahora que el ángulo θ depende del tiempo, de forma que podemos calcular la matriz velocidad angular $\hat{\boldsymbol{\omega}}'$, que según (1.52) está dada por

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}'(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta & -\dot{\theta}\cos\theta & 0 \\ \dot{\theta}\cos\theta & -\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta} & 0 \\ \dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En este ejemplo, según la definición (1.62) para la matriz (1.61), el vector velocidad angular es $\boldsymbol{\omega}' = (0, 0, \dot{\theta})$, es decir, está dirigido a lo largo del eje Z y su magnitud es precisamente la velocidad de cambio del ángulo de rotación θ. El vector velocidad angular describe lo rápidamente que rota (cuánto varía el ángulo θ por unidad de tiempo) S' alrededor del eje Z, con respecto a S. Notemos que en este caso $\boldsymbol{\omega}' = \mathcal{R}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}$ y las componentes de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\omega}'$ coinciden en ambos sistemas de referencia.

Una regla mnemotécnica para recordar cómo es la dirección del vector velocidad angular de una rotación alrededor de un eje fijo es a través de la **regla de la mano derecha**. Si sujetamos el eje de rotación, de forma que los dedos vayan en la dirección de crecimiento del ángulo de rotación como se indica en la figura 1.9, entonces el pulgar señala el sentido del vector velocidad angular.

Este ejemplo parece sugerir que la velocidad angular es un vector que está en la dirección del eje de rotación. Sin embargo, esto sólo es cierto cuando la dirección del eje no cambia en el tiempo. Para demostrar esto último primero tenemos que hacer una discusión de la matriz de rotación en términos del eje instantáneo de rotación.

Representación de una matriz de rotación en términos del eje instantáneo de rotación *

Ya hemos dicho anteriormente que en tres dimensiones las rotaciones tienen tres grados de libertad independientes. Estos tres grados de libertad pueden ele-