## ÍNDICE GENERAL

## PRÓLOGO

#### PARTE PRIMERA: FUNDAMENTOS

Tema 1. TEORÍA CLÁSICA DE LA RADIACIÓN	3
1.1. Ecuaciones de Maxwell	5
1.2. Ondas planas	8
1.3. El análisis de Fourier	13
1.4. Modos normales de radiación	17
1.5. Interferencia entre ondas electromagnéticas. $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$	19
1.6. Difracción de una onda electromagnética	20
1.7. Coherencia	25
Problemas propuestos	28
Tema 2. PROPIEDADES CORPUSCULARES DE LA	
RADIACION	29
2.1. Cuantización de la radiación. Fotones	31
2.2. Interpretación probabilística para el fotón	34
2.3. El problema de la cavidad radiante	39
2.4. El efecto Compton	46
2.5. Fotones y presión de radiación	۳۹
	53

	Problemas propuestos	59
Τe	ema 3. ONDAS DE MATERIA. PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE	63
	3.1. El estado cuántico de una partícula	65
	3.2. El postulado de De Broglie	73
	3.3. Interpretación física de la función de onda	78
	3.4. Valores medios e incertidumbres	83
	3.5. Difracción de partículas	87
	3.6. El principio de incertidumbre de Heisenberg	96
	Problemas propuestos	102

## PARTE SEGUNDA: MECÁNICA ONDULATORIA

Tema 4. EL ESPACIO DE FUNCIONES DE ONDA	109
4.1. Similitud y producto escalar	. 111
4.2. El espacio de las funciones de onda	114
4.3. Bases de Fourier y bases de representación	120
Bases de Fourier	120
Bases de representación	124
Proyecciones ortogonales	127
4.4. Operadores en un espacio de funciones	128
4.5. Representación matricial de un operador	132
4.6. Espacio de los estados. Notación de Dirac	136
4.7. El producto tensorial. Entrelazamiento	138
Problemas propuestos	143

Tema 5. MAGNITUDES FÍSICAS Y OPERADORES 14	45
5.1. Los operadores de posición y momento lineal 14	47
5.2. Operador representativo de una magnitud $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 1$	50
5.3. Espectro puntual de una magnitud física $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 15$	55
5.4. Espectro continuo de una magnitud física	59
5.5. Bases propias. Interpretación probabilística 10	63
Problemas propuestos	70
Tema 6. EVOLUCIÓN TEMPORAL DETERMINISTA	73
6.1. Evolución temporal de una partícula libre 1'	75
$6.2.$ La ecuación de Schrödinger $\ldots \ldots 18$	81
6.3. El operador de evolución temporal	86
$6.4.$ La ecuación de continuidad $\ldots \ldots 18$	88
$6.5.  ext{ Estados estacionarios. Autoenergías$	92
6.6. La representación en energías	99
6.7. Sistemas separables $\ldots \ldots 20$	06
6.8. Evolución temporal de valores medios $\dots \dots \dots$	11
6.9. Correspondencia con la física clásica (*) $\dots \dots \dots$	14
Problemas propuestos	19
Tema 7. MEDIDA Y POSTULADOS DE LA FÍSICA CUÁNTICA 22	25
7.1. Proyectores espectrales. Colapso del estado $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 22$	27
7.2. Compatibilidad entre observables $\dots \dots \dots$	32
7.3. Relación de incertidumbre generalizada $\dots \dots 24$	40
7.4. Incertidumbre energía-tiempo	42
7.5. Los postulados de la Física Cuántica $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 2^{4}$	44

7.6. El problema de la medida	 	 	• •	 	 • •	 • • •	247
Problemas propuestos	 	 		 	 	 	251

## Tema 8. MOMENTO ANGULAR 255

8.1. Los operadores de momento angular	256
8.2. Funciones de onda en coordenadas esféricas	258
8.3. Autofunciones del momento angular	263
8.4. Interpretación probabilística y momento angular	273
8.5. Estados estacionarios en campos centrales	278
Problemas propuestos	287

# PARTE TERCERA: APLICACIONES A SISTEMAS SIMPLES

Tema 9. ESTADOS LIGADOS EN POZOS CUADRADOS	293
9.1. Espectro de energías en una dimensión	294
9.2. El pozo cuadrado finito	305
9.3. Otros pozos cuadrados	313
Problemas propuestos	317
Tema 10. ESTADOS DE COLISIÓN EN UNA DIMENSIÓN	323
10.1. Estados de colisión. Interpretación física	324
10.2. El potencial escalón	331
10.3. La barrera de potencial	336
10.4. La fórmula de Gamow	344
10.5. El microscopio de efecto túnel	346
Apéndice: Resonancias	349

Problemas propuestos	359
Tema 11. EL OSCILADOR ARMÓNICO	363
11.1. Estados estacionarios de un oscilador	364
11.2. Dinámica cuántica de un oscilador armónico	373
11.3. Operadores de creación y destrucción	377
11.4. Estados coherentes	386
11.5. El oscilador armónico en varias dimensiones	389
Problemas propuestos	397
Apéndice A. ANÁLISIS VECTORIAL	405
A.1. Vectores. Operaciones con vectores	405
A.2. Coordenadas ortogonales	407
A.3. Campos escalares y vectoriales	411
Apéndice B. ESPACIOS DE FUNCIONES: COMPLEMENTOS	419
B.1. La integral de Lebesgue	419
B.2. Convergencia en espacios de funciones	420
B.3. Formas lineales y distribuciones temperadas	422
B.4. Equipamiento de espacios de Hilbert	426
B.5. Derivada en sentido de distribuciones	427
BIBLIOGRAFÍA	429
ÍNDICE DE SÍMBOLOS	435
ÍNDICE ALFABÉTICO	443

## TEMA 1

## TEORÍA CLÁSICA DE LA RADIACIÓN

Este libro trata de los procesos físicos que se producen a escala microscópica o, mejor dicho, de *cómo* estudiar esos procesos en sistemas cuya longitud natural está en el rango aproximado de  $10^{-12}$  a  $10^{-8}$  m. En este rango de distancias, la fuerza electromagnética (EM) es la interacción dominante. La razón de ello es que las fuerzas nucleares débil y fuerte empiezan a ser relevantes a longitudes más pequeñas mientras que la fuerza gravitatoria, la menos intensa de las interacciones fundamentales, sólo habrá de tenerse en cuenta cuando estemos bien adentrados en el mundo macroscópico.

Será, pues, el electromagnetismo quien dicte la dinámica de los procesos fisicoquímicos a nivel atómico y molecular, el comportamiento y la funcionalidad de nanodispositivos y también los fenómenos que ocurren en la escala de lo mesoscópico, esa difusa región que separa lo microscópico de lo macroscópico. Es entonces muy razonable abrir un curso de física cuántica con un breve repaso del electromagnetismo clásico y, por motivos que muy pronto se harán evidentes, focalizado en las propiedades de la radiación electromagnética. En este repaso prestaremos especial atención a diferentes temas que incluyen:

- el uso de funciones de variable compleja para expresar campos vectoriales
- la descomposición espectral de una onda mediante el análisis de Fourier
- los fenómenos de interferencia y difracción
- el concepto de coherencia

Esta selección, que ni de lejos constituye un resumen completo de la teoría electromagnética clásica, no es en absoluto casual. Por ejemplo, la física cuántica se formula en términos de campos complejos, por lo que resulta conveniente empezarlos a utilizar en un escenario cuyos conceptos físicos ya sean conocidos. Por otra parte, las técnicas de análisis de Fourier se utilizarán de manera continuada a lo largo del texto. La interferencia y la difracción de ondas, a su vez, son capitales en el establecimiento de las bases del formalismo cuántico; finalmente, la coherencia entre ondas es un concepto sutil pero importante y que queremos tratar con cierto detalle.

#### Orientaciones generales al plan de trabajo

Como hemos indicado, buena parte de este primer capítulo es un resumen de algunos aspectos de la teoría electromagnética clásica, la mayoría de ellos conocidos por el estudiante, y que se incluyen como referencia. El único apartado que puede ser conceptualmente nuevo es el análisis de la coherencia (sección 1.7) que, en todo caso, se trata también en asignaturas de óptica. A pesar de ello y puesto que las herramientas matemáticas que vamos a introducir se emplearán con mucha frecuencia en el futuro, sugerimos el estudio completo de este capítulo. A tal fin debe emplear unas 7 horas dentro un curso semestral diseñado sobre la base de 150 horas de trabajo personal, que se distribuyen a lo largo de quince semanas efectivas (10 horas por semana).

#### Objetivos del capítulo

- Afianzar conocimientos ya adquiridos en cursos anteriores sobre el tratamiento clásico de la radiación electromagnética.
- Familiarizarse con algunas herramientas matemáticas que serán de uso habitual en física cuántica.
- Ser capaz de manejar las técnicas de descomposición espectral basadas en el análisis de Fourier.
- Aprender a tratar fenómenos de interferencia y difracción usando un formalismo de campos complejos.
- Comprender el concepto de coherencia y saber distinguir entre superposición coherente y mezcla incoherente.

#### **1.1. ECUACIONES DE MAXWELL**

§ 1. El electromagnetismo clásico se construye a partir de un conjunto de ecuaciones que relacionan el *campo electromagnético* { $\mathcal{E}(\mathbf{r},t), \mathcal{B}(\mathbf{r},t)$ } con las *fuentes* que lo producen, y que están definidas por sus densidades de carga  $\rho_{c}(\mathbf{r},t)$  y de corriente eléctrica  $\mathcal{J}_{c}(\mathbf{r},t)$ . Éstas son las *ecuaciones de Maxwell* que en el sistema internacional de unidades se escriben como:

$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}\left(\mathbf{r},t\right)=\frac{1}{\epsilon_{0}}\rho_{\mathrm{c}}(\mathbf{r},t)$	(Ley de Gauss para $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ )	
$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\mathcal{B}}\left(\mathbf{r},t\right)=0$	(Ley de Gauss para $\pmb{\mathcal{B}})$	
$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\mathcal{E}}\left(\mathbf{r},t\right)=-\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{B}}\left(\mathbf{r},t\right)}{\partial t}$	(Ley de Faraday – Lenz)	(1.1)
$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\mathcal{B}}\left(\mathbf{r},t\right)=\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{E}}\left(\mathbf{r},t\right)}{\partial t}+\mu_{0}~\boldsymbol{\mathcal{J}}_{\mathrm{c}}(\mathbf{r},t)$	(Ley de Ampère)	

donde  $\epsilon_0 \simeq 8.85 \times 10^{-12}$  F m<sup>-1</sup> (C<sup>2</sup> N<sup>-1</sup> m<sup>-1</sup>) y  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  N A<sup>-2</sup> son constantes universales denominadas permitividad eléctrica y permeabilidad magnética del vacío, respectivamente, mientras que  $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2} \simeq 3 \times 10^8$  m s<sup>-1</sup> es la velocidad de la luz. El significado físico de los campos  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{B}$  viene dado por la fuerza de Lorentz

$$\mathbf{F}(\mathbf{r},t) = q\Big(\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r},t) + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbf{r},t)\Big)$$
(1.2)

que es la ejercida por el campo electromagnético (EM) sobre una carga q, situada en el instante t en un punto  $\mathbf{r}$  que se mueve a velocidad  $\mathbf{v}$ .

Las densidades de carga  $\rho_c$  y corriente  $\mathcal{J}_c$  no son independientes entre sí ya que, como se deduce de las ecuaciones de Maxwell, deben verificar la *ecuación de continuidad* 

$$\frac{\partial \rho_{\rm c}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\mathcal{J}}_{\rm c}(\mathbf{r},t)$$
(1.3)

que no es otra cosa que la ley conservación de la carga.

Conviene indicar que las densidades de carga y de corriente eléctrica que aparecen en las ecuaciones de Maxwell son *netas*, por lo que incluyen las cargas de polarización y las corrientes de magnetización que surgen en un medio material como respuesta a un campo EM externo. Además, tal y como hemos expresado las relaciones (1.1), se presupone que las fuentes *están dadas*, es decir, que conocemos exactamente cómo evolucionan en el tiempo [de acuerdo con lo expresado por las funciones  $\rho_{\rm c}(\mathbf{r},t)$  y  $\mathcal{J}_{\rm c}(\mathbf{r},t)$ ]. Por tanto, con la información que tenemos no es posible resolver un problema de electrodinámica en su sentido más amplio, en el que la evolución temporal de la fuente está afectada por la propia fuerza de Lorentz.

En ausencia de fuentes, las cuatro ecuaciones de Maxwell se reducen a

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} (\mathbf{r}, t) = 0 \qquad (\text{Ley de Gauss para } \boldsymbol{\mathcal{E}})$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}} (\mathbf{r}, t) = 0 \qquad (\text{Ley de Gauss para } \boldsymbol{\mathcal{B}})$$

$$\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}} (\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}} (\mathbf{r}, t)}{\partial t} \qquad (\text{Ley de Faraday} - \text{Lenz}) \qquad (1.4)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{B}} (\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}} (\mathbf{r}, t)}{\partial t} \qquad (\text{Ley de Ampère})$$

que son las adecuadas para describir la radiación electromagnética libre. Vemos que tanto el campo eléctrico como el campo magnético de la radiación libre son transversales (su divergencia es nula) y que están acoplados entre sí a través de las leyes de Faraday-Lenz y de Ampère: una variación temporal de  $\boldsymbol{\mathcal{E}}$  genera un campo magnético y viceversa. Esto explica el conocido carácter autosostenido de la radiación electromagnética que, como sabemos y se deduce de las ecuaciones (1.4), se propaga a velocidad c. Es así legítimo llamar onda electromagnética a la radiación EM libre.

Las ecuaciones de Maxwell son lineales, por lo que el campo electromagnético cumple el **principio de superposición**: si en una región del espacio coexisten dos ondas EM, el campo electromagnético total es la suma de los campos de cada una de ellas. Debido a este principio de superposición, la solución general de las ecuaciones de Maxwell con fuentes (1.1) es igual al campo EM generado (o emitido) realmente por esas fuentes, superpuesto a un campo EM libre arbitrario que satisfaga las ecuaciones (1.4). Finalmente, y como es inmediato comprobar, el campo EM emitido por densidades de carga y corriente depende linealmente de éstas.

§ 2. La energía almacenada en un campo EM por unidad de volumen es

$$u_{\rm EM}(\mathbf{r},t) = \frac{\epsilon_0 \left|\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r},t)\right|^2}{2} + \frac{\left|\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbf{r},t)\right|^2}{2\mu_0} = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\left|\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r},t)\right|^2 + c^2 \left|\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbf{r},t)\right|^2\right)$$
(1.5)

Puesto que el campo EM es un ente físico por sí mismo es natural considerar  $u_{\rm EM}(\mathbf{r},t)$  como su *densidad de energía*. A partir de las ecuaciones de Maxwell, y usando resultados del análisis vectorial que pueden encontrarse en el **Apéndice A**, puede probarse que la variación temporal de la densidad de energía de la radiación libre en un punto **r** es

$$\frac{\partial u_{\rm EM}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = -c^2 \, \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\pi}_{\rm EM}(\mathbf{r},t), \qquad (1.6)$$

donde

$$\boldsymbol{\pi}_{\rm EM}(\mathbf{r},t) = \epsilon_0 \,\,\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r},t) \times \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbf{r},t) \tag{1.7}$$

es la densidad de momento lineal del campo EM. Integrando (1.5) y (1.7) sobre todo el espacio tendríamos la energía y el momento lineal totales de la onda electromagnética.

La energía y el momento lineal de la radiación EM se manifiestan físicamente al interaccionar con partículas cargadas. En tal interacción hay una transferencia de energía y momento lineal de la radiación a las cargas y, recíprocamente, éstas emiten radiación a expensas de su energía y de su momento.

Si ahora integramos (1.6) sobre un volumen  $\mathcal{V}$  limitado por una superficie cerrada  $\mathcal{S}$  y aplicamos el teorema de la divergencia de Gauss (véase el **Apéndice A**) llegamos a la relación

$$-\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} u_{\rm EM}(\mathbf{r}, t) d^3 \mathbf{r} = c^2 \oint_{\mathcal{S}} \pi_{\rm EM}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} \ d^2 \mathbf{r}, \qquad (1.8)$$

donde **n** es un vector unitario normal a la superficie S en el punto **r**. La igualdad (1.8) nos dice que la variación temporal de la energía EM de la radiación libre almacenada en una región V del espacio es igual (salvo signo) al flujo del momento del campo EM,  $c^2 \pi_{\rm EM}(\mathbf{r},t)$ , a través de la frontera S de dicha región. Por tanto, en una onda electromagnética se produce un transporte de energía que es consecuencia de su propia naturaleza descrita y que está directamente relacionado con la densidad de momento lineal: la energía EM "viaja" en el espacio y la densidad de corriente de energía correspondiente es  $c^2 \pi_{\rm EM}(\mathbf{r},t)$ , cantidad conocida como vector de Poynting. De esta manera, se considera que la dirección de propagación de una onda electromagnética en un punto **r** es la del vector de Poynting.

§ 3. La estructura de las ecuaciones de Maxwell para la radiación libre (1.4) permite describirla en términos de un *potencial electromagnético vector*  $\mathcal{A}(\mathbf{r}, t)$ ,

del cual deriva el campo EM en la forma

$$\mathcal{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{\partial \mathcal{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t}$$
(1.9)  
$$\mathcal{B}(\mathbf{r},t) = \boldsymbol{\nabla} \times \mathcal{A}(\mathbf{r},t)$$

En efecto, esta definición garantiza el cumplimiento automático de la ley de Gauss para el campo magnético y de la de Faraday-Lenz. Las leyes de Gauss para  $\boldsymbol{\mathcal{E}}$  y de Ampère se escriben en términos de  $\boldsymbol{\mathcal{A}}$  como

$$\nabla \cdot \mathcal{A}(\mathbf{r}, t) = 0$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathcal{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}.$$
(1.10)

De esta manera, la radiación libre queda descrita únicamente<sup>1</sup> por el potencial  $\mathcal{A}(\mathbf{r},t)$ , que resulta ser transversal (primera ecuación 1.10), y cuyas tres componentes satisfacen una ecuación de ondas homogénea (segunda ecuación 1.10).

#### 1.2. ONDAS PLANAS

§ 1. Nos centraremos ahora en las propiedades de la radiación libre. Esta restricción es razonable no sólo por su importancia intrínseca sino también porque el campo electromagnético emitido por una fuente oscilante cualquiera se comporta suficientemente lejos de ésta como radiación libre. Nuestro objetivo será hallar la forma más general del potencial vector  $\mathcal{A}(\mathbf{r},t)$  que satisfaga las ecuaciones (1.10), ya que a partir de él podremos obtener fácilmente los campos eléctrico y magnético y también otras propiedades de interés de la radiación, como sus densidades de energía y momento. Para ello empezaremos analizando las soluciones monocromáticas de la ecuación de ondas (1.10), puesto que el principio de superposición nos permitirá construir cualquier solución a partir de ellas.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Sin embargo, la relación entre el campo EM y el potencial vector no es biunívoca. Distintos potenciales vector pueden describir el mismo campo.

Antes de proceder recordemos que una función g(t) real es monocromática o armónica con frecuencia<sup>2</sup>  $\omega > 0$  si se puede expresar como  $g(t) = g_{\rm c} \cos(\omega t) + g_{\rm s} \sin(\omega t)$ . Usando las relaciones trigonómetricas fundamentales

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{+i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \quad ; \quad \sin(\omega t) = \frac{e^{+i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$$

la función g(t) también puede escribirse como la parte real de una función compleja  $G(t) = G_0 e^{-i\omega t}$ . En efecto, podemos escribir que

$$g(t) = \frac{G_0}{2}e^{-\mathrm{i}\omega t} + \frac{G_0^*}{2}e^{+\mathrm{i}\omega t} = \mathfrak{Re}\Big(G_0e^{-\mathrm{i}\omega t}\Big) \equiv \mathfrak{Re}\Big(G(t)\Big), \qquad (1.11)$$

donde  $G_0 = g_c + ig_s$ ,  $G_0^* = g_c - ig_s$  es el complejo conjugado de  $G_0$ , y  $\Re \mathfrak{e}$  es la parte real. La utilización de esta representación compleja para g(t) evita tediosas operaciones trigonométricas.

Además, si g es vectorial, los desfases entre las oscilaciones de sus componentes se pueden tratar de manera muy simple. En este caso definiremos el módulo de un vector de componentes complejas **G** como el escalar real y positivo dado por

$$|\mathbf{G}| \equiv \sqrt{\mathbf{G}^* \cdot \mathbf{G}} \tag{1.12}$$

§ 2. De acuerdo con esta manera de representar funciones armónicas, podemos proponer que el potencial vector de una *onda monocromática libre* de frecuencia  $\omega$  tiene la forma genérica

$$\mathcal{A}(\mathbf{r},t) = \mathfrak{Re}\left(\mathbf{A}(\mathbf{r})e^{-\mathrm{i}\omega t}\right)$$
(1.13)

donde  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  es una función de componentes complejas. Si sustituimos  $\mathcal{A}(\mathbf{r}, t)$  en (1.10) vemos inmediatamente que  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  cumple las ecuaciones

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$$

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{0},$$
(1.14)

por lo que concluimos que  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  ha de ser un campo complejo transversal que obedezca una *ecuación de Helmholtz homogénea*, la segunda de las ecuaciones (1.14).

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>  $\omega$  es la *frecuencia angular* o *pulsación* pero, por simplicidad, llamaremos a  $\omega$  *frecuencia*. Si hubiese alguna posibilidad de confusión con  $\nu = \omega/(2\pi)$ , especificaríamos que  $\omega$  es la pulsación.

La solución más sencilla de (1.14) es:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}_0 e^{\mathbf{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad \text{con} \begin{cases} \mathbf{k}\cdot\mathbf{A}_0 = 0\\ \\ |\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c} \end{cases}$$
(1.15)

y, entonces,

$$\mathcal{A}(\mathbf{r},t) = \mathfrak{Re}\left(\mathbf{A}_0 e^{\mathbf{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\right).$$
(1.16)

Aquí  $\mathbf{k}$  es un vector real con dimensiones de longitud recíproca (inversa de longitud), al que denominaremos vector de onda. La transversalidad de  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  queda asegurada al ser el vector constante  $\mathbf{A}_0$ , de componentes complejas, perpendicular a  $\mathbf{k}$ , mientras que la llamada relación de dispersión,  $|\mathbf{k}| = \omega/c$ , garantiza el cumplimiento de la ecuación de Helmholtz.

Puesto que  $\exp(2\pi i n) = 1$  para cualquier entero n, el potencial vector exhibe la siguiente periodicidad espacial:

$$\mathcal{A}(\mathbf{r},t) = \mathcal{A}(\mathbf{r}+n\lambda\mathbf{u}_{\mathbf{k}},t) \text{ para todo } n \in \mathbb{Z},$$

donde  $\mathbf{u}_{\mathbf{k}} \equiv \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$  es el vector unitario en la dirección de  $\mathbf{k}$  y  $\lambda = 2\pi/|\mathbf{k}|$  es la denominada *longitud de onda*. De esta forma  $\mathcal{A}(\mathbf{r},t)$  siempre toma los mismos valores en planos perpendiculares a  $\mathbf{k}$  y separados una distancia  $\lambda$ . Esto justifica plenamente la denominación *onda plana* para este tipo de radiación libre monocromática

§ 3. Si  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$  son dos vectores de módulo unidad perpendiculares entre sí y contenidos en el plano normal a la dirección  $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}$  (vea la **FIG. 1-1**), entonces tanto el potencial vector *físico*  $\mathcal{A}(\mathbf{r},t)$  como el vector complejo  $\mathbf{A}_0$  son combinación lineal de  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$ . En efecto, usando la forma polar de un número complejo,  $\mathbf{A}_0$  puede escribirse como

$$\mathbf{A}_0 = A_1 e^{\mathbf{i}\delta_1} \mathbf{u}_1 + A_2 e^{\mathbf{i}\delta_2} \mathbf{u}_2 \quad \text{con } A_1, A_2 \in \mathbb{R}^+$$

y sustituyendo en (1.16),

$$\mathcal{A}(\mathbf{r},t) = [A_1 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta_1)]\mathbf{u}_1 + [A_2 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta_2)]\mathbf{u}_2 \qquad (1.17)$$

Esta igualdad pone de manifiesto una de las ventajas de la notación compleja que ya adelantamos: el vector  $\mathbf{A}_0$  contiene no sólo las amplitudes de oscilación del potencial vector a lo largo de cada dirección  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$  sino también el desfase



Figura 1-1. Componentes del campo electromagnético para radiación que se propaga a lo largo de la dirección  $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}$ . Fíjese que tanto los vectores unitarios  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$  como el propio campo EM están contenidos en un plano perpendicular a  $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}$ .

 $\delta_2 - \delta_1$  entre ambas oscilaciones. En otros términos, fijado el vector de onda **k** hay dos grados de libertad relacionados con las orientaciones permitidas del potencial vector.

Otra ventaja de la notación compleja es la facilidad con la que se evalúan promedios temporales. Por ejemplo, el cuadrado del módulo del potencial vector físico es

$$|\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathbf{r},t)|^2 = A_1^2 \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta_1) + A_2^2 \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta_2),$$

y como  $\langle \cos^2(\omega t + \delta) \rangle_{\text{temp}} = 1/2$ , donde  $\langle \rangle_{\text{temp}}$  simboliza el promedio temporal sobre un periodo de oscilación, podemos escribir directamente que

$$\langle |\mathcal{A}(\mathbf{r},t)|^2 \rangle_{\text{temp}} = \frac{A_1^2 + A_2^2}{2} = \frac{1}{2} \mathbf{A}_0^* \cdot \mathbf{A}_0 = \frac{1}{2} |\mathbf{A}_0|^2.$$
 (1.18)

En consecuencia,  $|\mathbf{A}_0|^2/2$  es igual a  $|\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathbf{r},t)|^2$  salvo fluctuaciones temporales.

§ 4. El campo EM de una onda plana (radiación libre) se obtiene inmediatamente sustituyendo (1.16) en (1.9):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r},t) &= \mathfrak{Re}\Big(\mathbf{E}_0 e^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\Big) & \operatorname{con} \mathbf{E}_0 = \mathrm{i}\omega\mathbf{A}_0 \end{aligned} \tag{1.19} \\ \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbf{r},t) &= \mathfrak{Re}\Big(\mathbf{B}_0 e^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\Big) & \operatorname{con} \mathbf{B}_0 = \mathrm{i}\mathbf{k}\times\mathbf{A}_0 \end{aligned}$$

por lo que  $\mathbf{E}_0$  y  $\mathbf{B}_0$  son también perpendiculares a  $\mathbf{k}$ . Usando la relación de dispersión tenemos a su vez que

$$\mathbf{E}_0 = c\mathbf{B}_0 \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}} \quad ; \quad \mathbf{B}_0 = \frac{1}{c}\mathbf{u}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0 \quad ; \quad |\mathbf{E}_0| = c|\mathbf{B}_0| \tag{1.20}$$

Los vectores  $\mathbf{E}_0 \mathbf{y} \mathbf{B}_0$  son complejos, pero si nos fijamos únicamente en las partes reales *físicas*,  $\mathcal{E}(\mathbf{r},t) \mathbf{y} \mathcal{B}(\mathbf{r},t)$ , su orientación relativa es la que muestra la FIG. 1-1. En consecuencia, la densidad de momento lineal  $\pi_{\text{EM}}(\mathbf{r},t) = \epsilon_0 \mathcal{E}(\mathbf{r},t) \times \mathcal{B}(\mathbf{r},t)$ está orientada en la dirección de  $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}$ , que es así la de propagación de la onda.

§ 5. A partir de las expresiones (1.5) y (1.7), las densidades de energía y de momento lineal de la onda plana (1.16) son

$$u_{\rm EM}(\mathbf{r},t) = \frac{\epsilon_0 \omega^2 |\mathbf{A}_0|^2}{2} + \text{t.o.} \quad ; \quad \boldsymbol{\pi}_{\rm EM}(\mathbf{r},t) = \frac{\epsilon_0 \omega^2 |\mathbf{A}_0|^2}{2c} \mathbf{u}_{\mathbf{k}} + \mathbf{t.o.}$$
(1.21)

donde "t.o." significa términos oscilantes que evolucionan armónicamente en torno a cero, en este caso con frecuencia  $2\omega$ . Puesto que el promedio temporal de estos términos es nulo,<sup>3</sup> sólo son físicamente relevantes los valores promediados temporalmente o *efectivos* 

$$u_{\rm EM} = \langle u_{\rm EM}(\mathbf{r}, t) \rangle_{\rm temp} = \frac{\epsilon_0 \omega^2 |\mathbf{A}_0|^2}{2}$$
(1.22)  
$$\boldsymbol{\pi}_{\rm EM} = \langle \boldsymbol{\pi}_{\rm EM}(\mathbf{r}, t) \rangle_{\rm temp} = \frac{\epsilon_0 \omega^2 |\mathbf{A}_0|^2}{2c} \mathbf{u}_{\mathbf{k}} = \frac{u_{\rm EM}}{c} \mathbf{u}_{\mathbf{k}}.$$

Dado que  $\mathbf{A}_0$  es un vector constante, vemos que tanto  $u_{\rm EM}$  como  $\pi_{\rm EM}$  son independientes de la posición. Como resultado, la onda plana se propaga en la dirección  $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}$  y, salvo fluctuaciones temporales,  $u_{\rm EM}$  y  $\pi_{\rm EM}$  son las densidades de energía y de momento lineal que transporta.

La introducción de estos valores promediados temporalmente nos lleva de manera natural a definir la *intensidad* o *irradiancia* de la onda como el módulo del valor efectivo del vector de Poynting:

$$I_{\rm EM} = |c^2 \boldsymbol{\pi}_{\rm EM}| = c \ u_{\rm EM} = \frac{c\epsilon_0 \omega^2 \ |\mathbf{A}_0|^2}{2}, \tag{1.23}$$

que puede interpretarse como la energía transportada por la onda por unidad de tiempo (salvo fluctuaciones en tiempos del orden de T) a través de una superficie de área unidad perpendicular a su dirección de propagación.

 $<sup>^3</sup>$ Salvo que seamos capaces de discriminar experimentalmente tiempos del orden del periodo de oscilación  $T=2\pi/\omega.$ 

**§** 6. La onda EM plana se propaga en una dirección bien definida en todos los puntos del espacio. Estamos, pues, en una situación física en la que usamos dos aproximaciones límite: el monocromatismo y la extensión espacial infinita. Podríamos hacer una descripción más realista modulando esta onda, esto es, multiplicándola por un factor dependiente de la posición de tal modo que la región del espacio en la cual el campo EM toma valores no nulos sea limitada. Sin embargo esto no es inmediato ya que hay que seguir cumpliendo las ecuaciones de Maxwell. Estos aspectos técnicos son más propios de un texto de óptica, pero lo importante es: cuando decimos que el potencial vector de la radiación libre es  $\Re(\mathbf{A}_0 \exp(\mathbf{i} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{i} \omega t))$  implícitamente estamos considerando que es una aproximación válida sólo en una región limitada, cuyo volumen es mucho mayor que la parte del espacio donde está el sistema físico que nos interesa estudiar. En otras palabras, damos siempre por supuesto que hablamos siempre de un pulso electromagnético que se desplaza con velocidad c a lo largo de la dirección  $\mathbf{u}_{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ , pero cuyo potencial vector en la zona de interés se puede aproximar por el de una onda plana.

#### 1.3. EL ANÁLISIS DE FOURIER

§ 1. La importancia de las ondas planas quedará patente cuando apliquemos a un campo EM  $\mathcal{A}(\mathbf{r},t)$  el *análisis de Fourier*. En esta sección presentaremos los principales resultados de esta herramienta matemática, aunque omitiendo cualquier demostración. Si está interesado puede consultar los textos de métodos matemáticos que se citan en la bibliografía.

§ 2. Sea  $G(\mathbf{r})$  una función, en general compleja, definida sobre el espacio  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  (lo habitual es  $\mathbb{N} = 3$  pero conviene considerar el caso más general). El resultado básico del análisis de Fourier es que dicha función puede escribirse mediante una suma (continua) de funciones proporcionales a  $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$  a través de una transformada de Fourier inversa

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(\mathbf{k}) e^{+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^N \mathbf{k} \equiv \{\mathcal{F}^{-1}\tilde{G}\}(\mathbf{r}), \qquad (1.24)$$

donde la función  $\tilde{G}(\mathbf{k})$  es la *transformada de Fourier* de la función  $G(\mathbf{r})$ :

$$\tilde{G}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} G(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^N \mathbf{r} \equiv \{\mathcal{F} \ G\}(\mathbf{k}).$$
(1.25)

Supondremos que la función  $G(\mathbf{r})$  cumple aquellas condiciones de decaimiento rápido a cero cuando  $|\mathbf{r}| \to \infty$  y de acotación que garantizan que su transformada de Fourier converja. A  $\tilde{G}(\mathbf{k})$  se le llama *representación en el espacio recíproco* (el espacio de los vectores de onda  $\mathbf{k}$ ) o, sencillamente, representación recíproca de  $G(\mathbf{r})$ .<sup>4</sup>

Si  $g(\mathbf{r})$  es una función escalar y  $G(\mathbf{r})$  otra vectorial, se tiene que

$$\nabla g(\mathbf{r}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathrm{i}\mathbf{k}\tilde{g}(\mathbf{k}) \quad ; \qquad \nabla^2 g(\mathbf{r}) \xrightarrow{\mathcal{F}} -|\mathbf{k}|^2 \tilde{g}(\mathbf{k})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{G}(\mathbf{r}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathrm{i}\mathbf{k} \cdot \widetilde{\mathbf{G}}(\mathbf{k}) \quad ; \qquad \nabla \times \mathbf{G}(\mathbf{r}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathrm{i}\mathbf{k} \times \widetilde{\mathbf{G}}(\mathbf{k}),$$
(1.26)

por lo que las derivadas espaciales se transforman en multiplicaciones por el vector de ondas  $\mathbf{k}$  al pasar al espacio recíproco, aunque incluyendo un factor i.

El llamado teorema de Parseval nos dice que dadas dos funciones cualesquiera F y G se cumple que

$$\int_{\mathbb{R}^{N}} G^{*}(\mathbf{r}) F(\mathbf{r}) \ d^{N}\mathbf{r} = \int_{\mathbb{R}^{N}} \tilde{G}^{*}(\mathbf{k}) \tilde{F}(\mathbf{k}) \ d^{N}\mathbf{k}.$$
(1.27)

Conviene aquí comentar que el teorema es válido también si el producto entre  $G^*$  y F (o  $\tilde{G}^*$  y  $\tilde{F}$ ) es el producto escalar o vectorial (en N = 3) en el caso en que G y F sean funciones vectoriales.

§ 3. Definamos la *delta de Dirac* centrada en el punto  $a, \delta(\mathbf{r}-a)$ , como aquella "función" para la que siempre se cumple que

$$\int_{\mathbb{R}^{N}} \delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{a}) g(\mathbf{r}) \ d^{N} \mathbf{r} = g(\boldsymbol{a})$$
(1.28)

para cualquier función  $g(\mathbf{r})$  continua en  $\mathbf{r} = \mathbf{a}$ . De acuerdo con esta definición, la delta en N dimensiones es igual al producto de N deltas unidimensionales. Por ejemplo en N = 3,

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = \delta(x - a_x)\delta(y - a_y)\delta(z - a_z) , \quad \text{con} \quad \mathbf{a} = a_x\mathbf{u}_x + a_y\mathbf{u}_y + a_z\mathbf{u}_z.$$

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup> Hemos introducido una notación operacional muy del gusto de los matemáticos:  $\mathcal{F}$  es una aplicación que transforma la función  $G(\mathbf{r})$  definida en el espacio de posiciones en otra función  $\widetilde{G}(\mathbf{k})$  definida en el espacio de vectores de onda (espacio recíproco).  $\mathcal{F}^{-1}$  sería la aplicación inversa.

De manera poco rigurosa podemos decir que

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = \delta(\mathbf{a} - \mathbf{r}) = \begin{cases} 0 \text{ si } \mathbf{r} \neq \mathbf{a} \\ \\ \infty \text{ si } \mathbf{r} = \mathbf{a} \end{cases}$$
(1.29)

o, con algo más de propiedad, que la delta de Dirac es el límite de una función muy concentrada en torno a  $\mathbf{r} = \mathbf{a}$  cuya integral sobre todo el espacio es igual a la unidad.<sup>5</sup> Por ejemplo, en N = 1 la delta de Dirac es igual a los siguientes límites:

$$\delta(x-a) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{e^{-(x-a)^2/\varepsilon^2}}{\sqrt{\pi}\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\varepsilon/\pi}{(x-a)^2 + \varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\sin[(x-a)/\varepsilon]}{\pi(x-a)} \quad (1.30)$$

En efecto, estas funciones cumplen que la integral sobre todo  $\mathbb{R}$  es igual a uno, y que cuando  $\varepsilon \to 0$  se anulan en todos los puntos menos en a.

La delta de Dirac está estrechamente relacionada con la transformada de Fourier, puesto que puede demostrarse que

$$\int_{\mathbb{R}^{N}} e^{+i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_{1}-\mathbf{r}_{2})} d^{N}\mathbf{k} = \int_{\mathbb{R}^{N}} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_{1}-\mathbf{r}_{2})} d^{N}\mathbf{k} = (2\pi)^{N} \ \delta(\mathbf{r}_{1}-\mathbf{r}_{2})$$
(1.31)

expresión que ha de entenderse en sentido formal ya que, como acabamos de decir, la delta de Dirac es un límite. Al ser (1.31) independiente de las dimensiones físicas de  $\mathbf{k} \ge \mathbf{r}_i$ , tras un mero intercambio de variables

$$\int_{\mathbb{R}^{N}} e^{+\mathrm{i}(\mathbf{k}_{1}-\mathbf{k}_{2})\cdot\mathbf{r}} d^{\mathrm{N}}\mathbf{r} = \int_{\mathbb{R}^{N}} e^{-\mathrm{i}(\mathbf{k}_{1}-\mathbf{k}_{2})\cdot\mathbf{r}} d^{\mathrm{N}}\mathbf{r} = (2\pi)^{\mathrm{N}} \,\delta(\mathbf{k}_{1}-\mathbf{k}_{2}) \tag{1.32}$$

donde la delta de Dirac  $\delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$  para el espacio de vectores de onda tiene análoga interpretación que para el espacio de posiciones.

§ 4. El análisis de Fourier se aplica también a la descomposición de una función dependiente del tiempo en componentes monocromáticas (muchas veces llamadas *armónicos*). En concreto, para una función g(t) general, que decae a cero suficientemente rápido cuando  $|t| \to \infty$ , su par de transformadas temporales de Fourier<sup>6</sup> es

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \qquad \qquad \hat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{+i\omega t} dt \qquad (1.33)$$

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup> Como se señala en el **Apéndice B**, la delta de Dirac sólo tiene sentido matemático pleno como una *distribución*. Esta definición como límite es, sin embargo, suficiente para nuestros propósitos.

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup> Usamos  $\tilde{G}(\mathbf{k})$  para designar la transformada de Fourier espacial de la función  $G(\mathbf{r})$ , y  $\hat{g}(\omega)$  para la transformada de Fourier temporal de una función g(t).

(la convención de signos de las exponenciales complejas temporales es la contraria que la de las transformaciones de Fourier espaciales). Naturalmente, el teorema de Parseval se sigue cumpliendo, al igual que las relaciones equivalentes a (1.31) y (1.32) entre la transformada de Fourier y las deltas de Dirac ( $\delta(t-t_0)$  en tiempos y  $\delta(\omega - \omega_0)$  en frecuencias).

Si g(t) es real es fácil ver que  $\hat{g}(-\omega) = \hat{g}^*(\omega)$ . Por consiguiente, la expresión

$$g(t) = \int_0^\infty \frac{\hat{g}(\omega)e^{-\mathrm{i}\omega t}}{\sqrt{2\pi}} d\omega + \int_{-\infty}^0 \frac{\hat{g}(\omega)e^{-\mathrm{i}\omega t}}{\sqrt{2\pi}} d\omega = \int_0^\infty \frac{\hat{g}(\omega)e^{-\mathrm{i}\omega t} + \hat{g}(-\omega)e^{+\mathrm{i}\omega t}}{\sqrt{2\pi}} d\omega$$

puede escribirse como

$$g(t) = \Re \mathfrak{e}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty 2\hat{g}(\omega) e^{-\mathrm{i}\omega t} d\omega\right) \equiv \Re \mathfrak{e}(\mathbf{G}(t)).$$
(1.34)

Esta función G(t), llamada representación compleja de g(t), se caracteriza porque su transformada de Fourier  $\hat{G}(\omega)$  en frecuencias es nula si  $\omega < 0$  y cumple que  $2\hat{g}(\omega) \equiv \hat{G}(\omega)$  si  $\omega > 0$ . La expresión (1.34) generaliza entonces la (1.11) que habíamos usado en el caso monocromático.

Definamos ahora la frecuencia media de la función g como

$$\langle \omega \rangle = \frac{1}{\mathcal{U}} \int_0^\infty \omega |\hat{\mathbf{G}}(\omega)|^2 d\omega, \quad \text{con} \quad \mathcal{U} \equiv \int_0^\infty |\hat{\mathbf{G}}(\omega)|^2 d\omega.$$
 (1.35)

Usando conocimientos de estadística elemental, sabemos que una medida de la concentración de las frecuencias de los armónicos de g alrededor de esa frecuencia media  $\langle \omega \rangle$  es la dispersión cuadrática media  $\Delta \omega$  de g(t), obtenida como:

$$\Delta\omega = \left[\frac{1}{\mathcal{U}}\int_0^\infty \left(\omega - \langle\omega\rangle\right)^2 |\hat{\mathbf{G}}(\omega)|^2 d\omega\right]^{1/2}.$$
 (1.36)

Si  $\Delta \omega \ll \langle \omega \rangle$  diremos que la función g(t) es cuasimonocromática. Desarrollando  $(\omega - \langle \omega \rangle)^2$  en (1.36) y agrupando términos es sencillo comprobar que  $\Delta \omega$  también puede evaluarse como

$$\Delta\omega = \left[\frac{1}{\mathcal{U}}\int_0^\infty \omega^2 |\hat{\mathbf{G}}(\omega)|^2 d\omega - \langle\omega\rangle^2\right]^{1/2} = \sqrt{\langle\omega^2\rangle - \langle\omega\rangle^2},\qquad(1.37)$$

donde  $\langle \omega^2 \rangle$  es el valor medio del cuadrado de la frecuencia. Cualitativamente, la función g(t) será la superposición de armónicos con frecuencias concentradas en el intervalo  $(\langle \omega \rangle - \Delta \omega, \langle \omega \rangle + \Delta \omega)$ . A la cantidad  $2\Delta \omega$  la llamaremos anchura en frecuencias o ancho de banda.

#### 1.4. MODOS NORMALES DE RADIACIÓN

§ 1. Consideremos ahora una onda EM libre genérica con potencial vector  $\mathcal{A}(\mathbf{r},t)$ . Por conveniencia matemática trabajaremos con su representación compleja  $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ , que cumple que  $\mathcal{A}(\mathbf{r},t) = \Re (\mathbf{A}(\mathbf{r},t))$  y que, de acuerdo con el párrafo que sigue a (1.34), está definida como

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r},\omega) = \begin{cases} 2\hat{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(\mathbf{r},\omega) & \text{si } \omega \ge 0\\ 0 & \text{si } \omega < 0. \end{cases}$$
(1.38)

Aun siendo complejo, la representación compleja  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  del potencial vector también obedece las ecuaciones de Maxwell en el vacío, ya que es una mera "reordenación" de  $\mathcal{A}(\mathbf{r}, t)$  a través de su transformada de Fourier.

De acuerdo con los resultados básicos del análisis de Fourier, podemos escribir

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k},t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{(2\pi)^{3/2}} d^3\mathbf{k} \; ; \; \operatorname{con} \; \widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k},t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{A}(\mathbf{r},t)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{(2\pi)^{3/2}} d^3\mathbf{r} \quad (1.39)$$

y puesto que la transformada de Fourier de  $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  es i $\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t)$ , las ecuaciones (1.10) resultan ser (en el espacio de posiciones y su recíproco)

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k}, t) = 0$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad c^2 |\mathbf{k}|^2 \widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t) + \frac{\partial^2 \widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t)}{\partial t^2} = \mathbf{0}.$$
(1.40)

Así, la condición de transversalidad se traduce en que  $\widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t)$  es perpendicular al vector de onda  $\mathbf{k}$  [primera ecuación (1.40)] mientras que la ecuación de onda [segunda ecuación (1.40)] se reduce a que  $\widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t)$  siga un movimiento oscilatorio armónico simple de frecuencia  $\omega_k = c|\mathbf{k}|$ .

Su solución general es  $\widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k},t) = \widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}) \exp(-i\omega_k t)$  ya que la otra posible solución,  $\widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k},t) = \widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}) \exp(+i\omega_k t)$ , es incompatible con la definición (1.38). Sustituyendo en (1.39) y recordando que  $\mathcal{A}(\mathbf{r},t) = \mathfrak{Re}(\mathbf{A}(\mathbf{r},t))$ ,

$$\mathcal{A}(\mathbf{r},t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathfrak{Re}\left(\widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}) \ e^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)}\right)}{(2\pi)^{3/2}} \ d^3\mathbf{k} \qquad \mathrm{con} \quad \begin{cases} \omega_k = c|\mathbf{k}| \\ \widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = 0 \end{cases}$$
(1.41)

Por tanto,  $\mathcal{A}(\mathbf{r}, t)$  es igual a la suma (continua, a través de una integral) de potenciales vectores correspondientes a ondas planas. El análisis de Fourier nos ha

permitido llegar así a un resultado básico del electromagnetismo clásico: toda onda electromagnética libre se puede escribir de manera única como una superposición de ondas planas, que son así las soluciones básicas a las ecuaciones de Maxwell en el vacío. A cada una de las ondas planas que entran en la descomposición de Fourier (1.41) se la llama modo normal de radiación o simplemente modo de radiación. Cada modo de vector de onda  $\mathbf{k}$  está caracterizado por su frecuencia  $\omega_{\mathbf{k}}$  y por la amplitud compleja  $\widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k})$  que, por la condición de transversalidad, es perpendicular a  $\mathbf{k}$ .

**§ 2.** Puede demostrarse (es algo técnico) que la energía y el momento lineal totales almacenados en el campo EM son

$$U_{\rm EM}(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\epsilon_0 \omega_k^2 |\widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k})|^2}{2} d^3 \mathbf{k} \; ; \; \mathbf{P}_{\rm EM}(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\epsilon_0 \omega_k^2 |\widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k})|^2}{2c} \mathbf{u}_{\mathbf{k}} d^3 \mathbf{k} \qquad (1.42)$$

donde  $\mathbf{u}_{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ . Por tanto, vemos que  $U_{\rm EM}(t)$  y  $\mathbf{P}_{\rm EM}(t)$  son constantes en el tiempo, como era de esperar de los principios de conservación de la energía y del momento lineal. Recordando las igualdades (1.22) concluimos que *la energía y el momento lineal total de una onda EM libre son iguales a la suma de las energías y los momentos de los modos que la constituyen*. Además, cada contribución de vector de onda  $\mathbf{k}$  a la energía electromagnética total tiene la forma típica de un oscilador armónico de frecuencia  $\omega_k$  y amplitud  $|\widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k})|$ . Esta asociación formal justifica plenamente el término modo de radiación que estamos usando.

 $\S$  3. La descomposición en modos normales permite definir diferentes funciones que son muy útiles en el análisis pormenorizado de la energía EM. La más inmediata es la llamada densidad de energía en el espacio recíproco

$$\varepsilon_{\rm EM}(\mathbf{k}) = \frac{\epsilon_0 \ \omega_k^2 \ |\widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k})|^2}{2} \tag{1.43}$$

ya que, tal y como se infiere de (1.42),  $\varepsilon_{\rm EM}(\mathbf{k})d^3\mathbf{k}$  es la energía EM almacenada en los modos cuyo vector de onda está dentro de un entorno del espacio recíproco de volumen  $d^3\mathbf{k}$  centrado en  $\mathbf{k}$ . Esta densidad tiene así un carácter equivalente al de  $u_{\rm EM}(\mathbf{r},t)$  en el espacio real aunque, como es inmediato comprobar,  $\varepsilon_{\rm EM}(\mathbf{k})$  y  $u_{\rm EM}(\mathbf{r},t)$  no están relacionadas entre sí a través de una transformada de Fourier.

§ 4. Usando  $\widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k},t) = \widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}) \exp(-i\omega_k t), \ \partial \widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k},t)/\partial t = -i\omega_k \widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}) \exp(-i\omega_k t)$ y el teorema de Parseval, la energía del campo EM puede reescribirse como

$$U_{\rm EM} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right|^2 d^3 \mathbf{r}.$$
(1.44)

El integrando de (1.44) no es en general la densidad de energía que ya conocemos. Sin embargo la diferencia entre una y otra integrada sobre todo el espacio no contribuye al valor neto de  $U_{\rm EM}$ . Esto nos permite expresar la densidad de energía en términos del potencial vector complejo  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ :

$$u_{\rm EM}(\mathbf{r},t) = \frac{\epsilon_0}{2} \left| \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \right|^2, \qquad (1.45)$$

con la ventaja de que, aplicada a una onda monocromática  $\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)$ , nos da directamente el valor promediado temporalmente.

#### 1.5. INTERFERENCIA ENTRE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

§ 1. Consideremos dos ondas EM que coinciden en una zona del espacio y cuyos potenciales vector complejos son  $\mathbf{A}_1(\mathbf{r},t)$  y  $\mathbf{A}_2(\mathbf{r},t)$ . El principio de superposición dice que el potencial vector de la radiación resultante será

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}_1(\mathbf{r},t) + \mathbf{A}_2(\mathbf{r},t).$$

Ahora bien, tal aditividad no se aplica a la densidad de energía puesto que ésta depende cuadráticamente del campo EM. Así, aplicando (1.45),

$$u_{\rm EM}(\mathbf{r},t) = \frac{\epsilon_0}{2} \left| \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \right|^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \left| \frac{\partial \mathbf{A}_1(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{A}_2(\mathbf{r},t)}{\partial t} \right|^2$$

y, desarrollando el cuadrado del módulo,

$$u_{\rm EM}(\mathbf{r},t) = u_{\rm EM,1}(\mathbf{r},t) + u_{\rm EM,2}(\mathbf{r},t) + \epsilon_0 \Re \left(\frac{\partial \mathbf{A}_1^*(\mathbf{r},t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}_2(\mathbf{r},t)}{\partial t}\right).$$
(1.46)

§ 2. Supongamos ahora que las ondas 1 y 2 son monocromáticas con distintas frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . Como para cada onda monocromática se tiene que

$$\mathbf{A}_{i}(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}_{i}(\mathbf{r})e^{-i\omega_{i}t} \quad \Rightarrow \quad u_{\text{EM},i}(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_{0}}{2} \left|\frac{\partial \mathbf{A}_{i}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\right|^{2} = \frac{\epsilon_{0}\omega_{i}^{2}}{2}|\mathbf{A}_{i}(\mathbf{r})|^{2} \quad (1.47)$$

la densidad total de energía (1.46) será

$$u_{\rm EM}(\mathbf{r},t) = u_{\rm EM,1}(\mathbf{r}) + u_{\rm EM,2}(\mathbf{r}) + \epsilon_0 \omega_1 \omega_2 \Re \epsilon \left( \mathbf{A}_1^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}_2(\mathbf{r}) e^{\mathrm{i}(\omega_1 - \omega_2)t} \right).$$
(1.48)

El tercer término es una función armónica de frecuencia  $\omega_1 - \omega_2$  cuyo promedio temporal es cero. Por tanto en la superposición de ondas monocromáticas de diferentes frecuencias las densidades efectivas de energía son aditivas.

Sin embargo, si  $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega$  tendremos que  $u_{\rm EM}(\mathbf{r},t)$  no depende del tiempo y que el último término de (1.48) ya no va a ser en promedio cero:

$$u_{\rm EM}(\mathbf{r}) = u_{\rm EM,1}(\mathbf{r}) + u_{\rm EM,2}(\mathbf{r}) + \epsilon_0 \omega^2 \, \Re \left( \mathbf{A}_1^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}_2(\mathbf{r}) \right).$$
(1.49)

Al superponerse ondas de igual frecuencia aparecen entonces fenómenos de interferencia, que se traducen en la no aditividad de las densidades efectivas de energía EM. Dicha interferencia se dirá constructiva en un punto  $\mathbf{r}$  si se cumple que  $\Re(\mathbf{A}_1^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}_2(\mathbf{r})) > 0$  y destructiva en caso contrario. Puesto que la energía total debe ser igual a la suma de las energías totales de las ondas EM 1 y 2, la interferencia puede verse como una redistribución de la energía electromagnética, que tiende a concentrarse en las zonas en la que la interferencia es constructiva a expensas de las regiones en las que es destructiva. La importante igualdad (1.49) permite analizar la interferencia entre dos ondas monocromáticas de igual frecuencia simplemente estudiando el producto escalar de los vectores complejos  $\mathbf{A}_1^*(\mathbf{r})$  y  $\mathbf{A}_2(\mathbf{r})$ .

#### 1.6. DIFRACCIÓN DE UNA ONDA ELECTROMAGNÉTICA

**§ 1.** Otro fenómeno característico de las ondas EM (y de todas las ondas) es la *difracción*, entendida como el cambio que sufre una onda EM al incidir sobre un objeto (que puede ser desde una pequeña esfera hasta una pared opaca con una abertura que sí permite el paso de la radiación).

El tratamiento completo del fenómeno exige conocer cómo responde el objeto a la radiación y obtener el correspondiente campo EM inducido. Alternativamente, si conocemos o presuponemos el comportamiento del campo EM en la interfase entre el objeto y el vacío (condiciones de contorno) podremos enfocar el problema desde un punto de vista macroscópico. A pesar de esta simplificación, la resolución de una ecuación con condiciones de contorno constituye un problema matemático en muchos casos formidable, que se ve complicado además por el carácter vectorial del campo EM. En particular, si la radiación incidente es monocromática y suponemos que el *esparcimiento*<sup>7</sup> de la onda en la región interfacial preserva tanto

 $<sup>^7</sup>$  También se usa el término dispersión, aunque esa palabra tiene muchos posibles significados. En inglés, la palabra que se utiliza es scattering.

el monocromatismo como la frecuencia de la onda,<sup>8</sup> el potencial vector complejo total  $\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)$  satisfará fuera del objeto las ecuaciones (1.14) para el potencial vector en ausencia de fuentes.

Podemos, sin embargo, hacer un análisis mucho más simple. A tal fin imaginemos una onda plana de frecuencia  $\omega$  que se propaga en la dirección OY procedente desde  $y = -\infty$ 

$$\mathbf{A}_{\rm in}(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}_0 e^{{\rm i}ky} e^{-{\rm i}\omega t} \quad \text{con } k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}, \tag{1.50}$$

donde  $\mathbf{A}_0$  es perpendicular a la dirección de propagación  $\mathbf{u}_y$ . Dicha onda incide perpendicularmente sobre una fina lámina situada en el plano XZ que es opaca a la radiación pero que tiene una abertura de tamaño infinitesimal situada en  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ con área  $d^2\mathbf{r}'$  (vea la **FIG. 1-2**). De acuerdo con el *principio de Huygens-Fresnel* esa pequeña abertura actúa como la fuente de una *onda esférica* cuya expresión genérica es

$$d\mathbf{A}(\mathbf{r})e^{-\mathrm{i}\omega t} = \beta k \frac{\mathbf{A}_0 e^{\mathrm{i}kr}}{r} e^{-\mathrm{i}\omega t} d^2 \mathbf{r}', \qquad (1.51)$$

donde  $\beta$  es un factor adimensional que indicaremos un poco más adelante.

Supongamos ahora que la lámina tiene una abertura  $\mathcal{S}$  (de forma genérica) cuyo centro geométrico situaremos en  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ . De acuerdo con el principio de superposición, el campo EM total en la región y > 0 será la suma de los campos emitidos desde los elementos diferenciales en los que podemos dividir  $\mathcal{S}$ . Teniendo en cuenta que ahora cada uno de los elementos diferenciales está situado en  $\mathbf{r}'$ , la radiación total difractada será la suma sobre esos elementos diferenciales

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})e^{-\mathrm{i}\omega t} = \beta k \mathbf{A}_0 e^{-\mathrm{i}\omega t} \int_{\mathcal{S}} \frac{e^{\mathrm{i}k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^2 \mathbf{r}'$$
(1.52)

Sin embargo puede probarse que esta expresión sólo es válida (es decir, obedece las ecuaciones de Maxwell) si el punto **r** está muy cerca del eje OY (**r**  $\simeq r\mathbf{u}_y$  ó  $\theta \simeq \pi/2$  en la **FIG. 1-2**) y si la distancia desde el punto **r** a la abertura es mucho mayor que  $\lambda$ . En caso contrario la expresión del campo difractado será mucho más complicada.

En el límite de abertura infinitamente grande,  $S \to \mathbb{R}^2$ , la radiación atravesará la abertura sin verse perturbada. El campo (1.52) deberá tender entonces en

 $<sup>^{8}\,</sup>$  En esencia, estamos diciendo que la interacción entre la onda y el objeto es similar a una colisión elástica.