

Índice general

Prólogo	19
Nomenclatura	21
1 Introducción	27
1.1 Fuerza de superficie	27
1.2 Fuerza másica sobre una partícula fluida	28
1.3 Momento de fricción sobre un disco	29
1.4 Tensor de tensiones y fuerza de superficie	30
1.5 Viscosímetro troncocónico	30
1.6 Potencia de giro de un eje en un cojinete	31
2 Estática de fluidos	33
2.1 Atmósfera isoterma	33
2.2 Rotación de un tubo en U que contiene dos líquidos inmiscibles	34
2.3 Fuerza sobre una compuerta giratoria	36
2.4 Distribución de presión en un líquido en reposo de densidad no uniforme	40
2.5 Compuerta vertical que separa dos líquidos, uno de ellos de densidad no uniforme	40
2.6 Equilibrio entre aire, agua y aceite en dos depósitos conectados por una tubería	43
2.7 Energía asociada a la tensión superficial en gotas de agua . . .	45
2.8 Ascenso de agua por un tubo capilar con el extremo cerrado .	46
2.9 Ascenso capilar de agua entre dos placas verticales paralelas	47
2.10 Equilibrio en un tubo capilar tras introducirlo verticalmente en agua por su extremo abierto	48

2.11	Medida de la aceleración de un depósito mediante un manómetro con forma de tubo en U parcialmente sumergido en el líquido que contiene	50
2.12	Equilibrio de un cilindro sumergido apoyado longitudinalmente sobre el terreno	51
2.13	Equilibrio de un gas en un depósito en rotación	52
2.14	Equilibrio de un émbolo dentro de un cilindro que contiene aceite	53
2.15	Cuerpo flotante sobre dos capas de líquidos inmiscibles	56
2.16	Tubo en U inmerso en un depósito giratorio	59
2.17	Equilibrio de un cilindro sumergido apoyado longitudinalmente en el fondo y separando dos líquidos	62
2.18	Compuerta recta e inclinada que separa dos líquidos, uno de ellos de densidad no uniforme	65
2.19	Compuerta con forma de cuadrante circular	66
2.20	Fuerza y momento que ejercen tres capas de líquidos inmiscibles sobre una compuerta	69
2.21	Equilibrio en un depósito con paredes articuladas y accionadas mediante muelles	72
2.22	Equilibrio de cuerpos totalmente sumergidos	75
2.23	Compuerta con forma de sector circular	78
2.24	Forma de la superficie libre y fuerzas sobre una compuerta en un depósito sometido a aceleración lineal	80
3	Cinemática de fluidos	83
3.1	Determinación de la velocidad de una partícula fluida a partir de su trayectoria en coordenadas cilíndricas	83
3.2	Determinación del campo de aceleración	84
3.3	Líneas de corriente y derivada sustancial de la concentración de un contaminante	85
3.4	Cálculo de la línea de traza (I)	86
3.5	Determinación del potencial de un campo de velocidad en coordenadas polares	87
3.6	Vórtice libre	88
3.7	Cinemática de un flujo estacionario e incompresible	89
3.8	Cálculo de la línea de traza (II)	91
3.9	Senda y aceleración de partículas fluidas y línea de traza	92
3.10	Aceleración de una partícula fluida	93
3.11	Posición y aceleración de una partícula fluida en un determinado instante	94

4	Ecuaciones de conservación en forma diferencial	95
4.1	Campo de velocidad en un flujo de un líquido	95
4.2	Campo de velocidad en un flujo incompresible	96
4.3	Campo de velocidad no estacionario y ley de variación de la densidad con el tiempo	97
4.4	Densidad de una partícula fluida en función del tiempo en un campo de velocidad estacionario	98
4.5	Función de corriente en un campo de velocidad en coordenadas polares	98
4.6	Función de corriente y flujo volumétrico (I)	100
4.7	Determinación del tensor de tensiones viscosas a partir del campo de velocidad	100
4.8	Determinación de la distribución de presión a partir del campo de velocidad	101
4.9	Principios de conservación y ecuaciones generales de la mecánica de fluidos (I)	103
4.10	Principios de conservación y ecuaciones generales de la mecánica de fluidos (II)	104
4.11	Función de corriente y flujo volumétrico (II)	105
4.12	Irrotacionalidad y determinación del potencial de velocidad y la distribución de presión a partir de la función de corriente	106
4.13	Evolución de la densidad y la presión en la expansión de un gas en un cilindro	106
4.14	Vorticidad, circulación y presión en un vórtice de Rankine	107
4.15	Posición y densidad de una partícula fluida en función del tiempo	111
5	Ecuaciones de conservación en forma integral	113
5.1	Variación de la densidad de un gas en un cilindro (I)	113
5.2	Incremento de la temperatura del agua a través de una turbina	115
5.3	Compresor de aire	115
5.4	Equilibrio de un sistema de émbolos y cilindros sobre el que incide un chorro de agua	117
5.5	Impacto oblicuo sobre un deflector plano del agua descargada por gravedad desde un depósito	121
5.6	Fuerza sobre un tubo acodado por el que circula un gas	126
5.7	Flujo a través del rotor y el estator en un compresor axial	127
5.8	Sistema de freno hidrodinámico de una plataforma mediante un deflector	131
5.9	Conducto acodado que atraviesa la pared de separación de dos recintos a distinta presión	135

5.10	Descarga de un chorro de agua desde un tubo vertical	138
5.11	Descarga de chorros de agua en depósitos e impacto oblicuo de un chorro sobre una placa plana que se mueve en dirección normal a sí misma	141
5.12	Flujo a través de una unión de tuberías en Y	157
5.13	Vehículo de colchón de aire	159
5.14	Acoplamiento hidro-neumático entre dos cilindros	163
5.15	Flujo de agua en una tubería acodada. Fuerza sobre la tubería y potencia disipada en el agua	165
5.16	Flujo de aire a través de una tubería porosa seguida de un difusor cónico	167
5.17	Flujo sobre una placa plana	170
5.18	Desviación de un chorro de líquido mediante un deflector	171
5.19	Flujo en un aspersor de riego plano (I)	174
5.20	Impacto normal de un chorro sobre una placa plana móvil	177
5.21	Propagación de una onda en un canal	183
5.22	Propulsión de un cohete	184
5.23	Depósito móvil autopropulsado mediante un chorro	188
5.24	Proceso de inflado de un globo	189
5.25	Flujo incompresible, no estacionario y unidimensional en un conducto con sección de área variable	189
5.26	Flujo en un aspersor de riego plano (II)	192
5.27	Turbina hidráulica	193
5.28	Generación de una ola en un cilindro por el movimiento de un pistón	197
5.29	Turbina eólica	199
5.30	Globo aerostático	202
5.31	Impacto de un chorro horizontal de agua sobre una placa plana suspendida y articulada en su extremo superior	206
5.32	Resalto hidráulico anular	209
5.33	Desplazamiento de un móvil a través de un conducto que contiene un fluido en reposo	211
5.34	Impacto de chorros normales y oblicuos sobre cuerpos en reposo y en movimiento	212
5.35	Bomba de inyección	217
5.36	Proceso de llenado con aire de un depósito desde otro depósito de grandes dimensiones	221
5.37	Flujo debido a una fuente bidimensional	223
5.38	Flujo en un aspersor de riego no plano	226
5.39	Ventilación y ensayo de incendio en un túnel de carretera	229

5.40	Flujo alrededor de un obstáculo	233
5.41	Regulación neumática del movimiento de los émbolos del Problema 5.14	238
5.42	Flujo a través de un conducto de sección rectangular y paredes porosas	239
5.43	Propulsión mediante un chorro de un cuerpo flotante	241
5.44	Flujo a través de un conducto acodado con sección de área variable	241
5.45	Fuerza y momento de fuerzas sobre un elemento de tubería con bifurcación	244
5.46	Fuerza sobre un tubo acodado por el que circula un flujo no uniforme idealizado	246
5.47	Variación de la densidad de un gas en un cilindro (II)	247
6	Análisis dimensional	249
6.1	Momento de fricción sobre un disco	249
6.2	Descarga del líquido contenido en un depósito a través de un tubo	251
6.3	Caída de presión en una válvula	254
6.4	Fuerza de empuje en hélices de avión	256
6.5	Caída de un cuerpo con movimiento oscilatorio	257
6.6	Transmisión de calor por convección natural entre un fluido y un cuerpo sólido	258
6.7	Ruptura de una gota en una corriente de gas	259
6.8	Semejanza en bombas hidráulicas	260
6.9	Transmisión de calor en un flujo por convección forzada entre dos placas planas paralelas	261
6.10	Flujo en la cámara de inyección de una máquina de fundición	263
6.11	Sistema de separación de semillas	264
6.12	Inyección de metal líquido en un molde	265
6.13	Explosión en aire	266
6.14	Semejanza parcial en ensayos con un metal líquido y con agua	266
6.15	Fuerza oscilatoria sobre un cuerpo romo inducida por desprendimiento de torbellinos	268
6.16	Impacto de una gota sobre una superficie sólida	270
7	Flujos con efectos de viscosidad dominantes	273
7.1	Flujo en la zona de entrada de una tubería	273
7.2	Descarga por gravedad de un depósito a través de un conducto bidimensional	275

7.3	Flujo entre dos placas planas paralelas	276
7.4	Flujo de una lámina de líquido sobre un plano inclinado (I)	277
7.5	Flujo longitudinal entre dos cilindros coaxiales (I)	279
7.6	Flujo acimutal entre dos cilindros coaxiales	279
7.7	Flujo de aceite a través de un conducto	281
7.8	Flujo en un cojinete cilíndrico	282
7.9	Refrigerador de aceite	282
7.10	Flujo longitudinal entre dos cilindros coaxiales (II)	284
7.11	Viscosímetro de placa plana	285
7.12	Viscosímetro de cilindros concéntricos	287
7.13	Amortiguador de aceite	288
7.14	Ascenso de una burbuja de aire en un tubo que contiene aceite	291
7.15	Viscosímetro de cono y placa	293
7.16	Flujo de dos líquidos en capas superpuestas sobre un plano inclinado	294
7.17	Flujo de aceite con temperatura variable a través de un sistema de tubos en paralelo	294
7.18	Flujo sobre una cinta transportadora inclinada	296
7.19	Descarga no isoterma a través de un conducto del líquido contenido en un depósito cerrado	297
7.20	Flujo entre una placa plana y un disco giratorio	298
7.21	Flujo a través de un conducto bidimensional con paredes porosas	301
7.22	Flujo de una lámina de líquido sobre un plano inclinado (II)	302
8	Flujos de fluidos ideales	305
8.1	Descarga por gravedad de un depósito a través de un conducto	305
8.2	Proceso de vaciado por gravedad del líquido contenido en un depósito a través de un orificio	307
8.3	Reloj de agua (clepsidra)	307
8.4	Caída de presión durante el cierre progresivo de una válvula en un conducto por el que circula agua	309
8.5	Bombeo de un líquido mediante una unión de tuberías en forma de T	310
8.6	Tobera convergente-divergente con condiciones conocidas en una cierta sección aguas arriba de la sección de garganta	311
8.7	Proceso de llenado con aire de un depósito inicialmente vacío a través de una tobera convergente	313
8.8	Flujo a través de un orificio practicado en la pared del cilindro superior del Problema 5.4	314

8.9	Flujo en una tobera convergente-divergente. Área mínima de la sección de garganta e influencia de la presión a la salida . .	315
8.10	Onda de choque en una tobera convergente-divergente	318
8.11	Procesos de descarga de un depósito a través de una tobera convergente-divergente con condiciones de tobera adaptada y de llenado mediante un compresor	319
8.12	Flujo en la tobera convergente-divergente de un motor cohete	320
8.13	Procesos de llenado de un depósito a través de una tobera convergente-divergente y de descarga mediante una bomba de vacío	321
8.14	Túnel supersónico	323
8.15	Proceso de vaciado del cilindro inferior del Problema 5.14 . .	327
8.16	Tobera convergente-divergente funcionando con helio o aire (I)	328
8.17	Flujo compresible alrededor de un cuerpo romo	328
8.18	Hipótesis de flujo cuasiestacionario en el proceso de vaciado de un depósito	330
8.19	Determinación de la geometría de toberas	331
8.20	Determinación de las áreas de la sección en la que existe una onda de choque y de la sección de salida de una tobera convergente-divergente	332
8.21	Flujo a la salida de un motor cohete	334
8.22	Flujo alrededor de un cilindro en rotación	334
8.23	Influencia de la presión a la salida en el flujo en una tobera convergente-divergente	336
8.24	Ecuación de Bernoulli en flujos rotacionales	337
8.25	Apertura súbita del extremo inferior de un conducto que contiene agua	337
8.26	Tubo aspersionado inclinado	341
8.27	Flujo de aire en una tubería seguida de una tobera convergente. Cierre de una válvula	343
8.28	Vórtice libre en el proceso de vaciado a través de un orificio de un depósito que contiene líquido	345
8.29	Tobera convergente-divergente funcionando con helio o aire (II)	347
8.30	Acción del viento sobre un edificio	350
8.31	Diseño básico de una tobera convergente-divergente. Funcionamiento fuera de diseño (I)	352
8.32	Onda de choque generada por una explosión en la atmósfera	353
8.33	Proceso de vaciado e inmersión del cubo del Problema 2.15 .	353
8.34	Reflexión de una onda de choque normal sobre una pared . .	355

8.35	Mantenimiento de condiciones estacionarias en un depósito que se descarga a través de una tobera y es alimentado mediante un compresor	357
8.36	Flujo en una tobera convergente-divergente. Determinación de condiciones de funcionamiento a partir de la presión en una sección de área dada	358
8.37	Proceso de llenado con aire de un depósito a través de una tobera convergente-divergente	360
8.38	Diseño básico de una tobera convergente-divergente. Funcionamiento fuera de diseño (II)	362
8.39	Impacto de dos chorros de agua coaxiales	363
8.40	Flujo en un estatorreactor	363
9	Flujos turbulentos	367
9.1	Pérdida de carga en una tubería con fugas distribuidas	367
9.2	Determinación del caudal a través de una fuga puntual en una tubería	368
9.3	Determinación del número de estaciones de bombeo en una instalación	370
9.4	Trasvase de agua mediante un sifón	371
9.5	Instalación de conducción de agua y aceite entre depósitos	373
9.6	Flujo en la zona acodada de un sifón con difusor a la salida	377
9.7	Sistema de ventilación de un conducto con extremos abiertos	380
9.8	Sistema de acondicionamiento de aire de un recinto	382
9.9	Sistemas de llenado mediante bombeo y de descarga de un depósito	385
9.10	Sistema de extracción de petróleo mediante agua salada	389
9.11	Cálculo de la pérdida de carga en una tubería con fugas mediante la ecuación de Blasius	390
9.12	Bombeo desde dos depósitos a un tercero más elevado	391
9.13	Tiempo de descarga por gravedad a través de una tubería del líquido contenido en un depósito	394
9.14	Caudal de descarga por gravedad de un depósito a través de una tubería con bifurcación	396
9.15	Diámetro de una tubería de descarga por gravedad de un depósito	397
9.16	Caudales en una tubería con bifurcación	398
9.17	Sistema de bombeo. Rotura en la tubería de impulsión	399
9.18	Cálculo de la presión necesaria en una instalación de riego	401

9.19	Bomba con tubería de impulsión ramificada. Cálculo de los diámetros de las tuberías	402
9.20	Trasvase de agua entre depósitos mediante una tubería salvando una elevación del terreno (I)	403
9.21	Sistema de bombeo con dos bombas en serie	404
9.22	Detección de fuga en un oleoducto	408
9.23	Dimensiones básicas de una instalación de abastecimiento de agua	410
9.24	Sistema de extracción del líquido contenido en un depósito mediante otro líquido inmiscible	411
9.25	Conducción de agua con un tramo de tuberías en paralelo	412
9.26	Diseño básico de un sistema de bombeo desde dos depósitos	413
9.27	Trasvase de agua entre depósitos mediante una tubería salvando una elevación del terreno (II)	415
9.28	Flujo de agua a través del sistema de tubos en paralelo del Problema 7.17	417
9.29	Embalse con chimenea de equilibrio	417
9.30	Altura máxima de elevación en un sistema de bombeo (I)	418
9.31	Altura máxima de elevación en un sistema de bombeo (II)	420
9.32	Sistema de bombeo en circuito cerrado (I)	421
9.33	Altura máxima de elevación en un sistema de bombeo (III)	423
9.34	Hipótesis de flujo cuasiestacionario y tiempo de establecimiento del flujo en la descarga de un depósito por gravedad a través de una tubería	425
9.35	Sistema de bombeo en circuito cerrado (II)	428
9.36	Trasvase desde un depósito mediante bombeo con inyección lateral en la impulsión	430
9.37	Sistema de bombeo en circuito cerrado (III)	432
10	Flujos en canales abiertos	435
10.1	Canal de sección rectangular con cambio de pendiente	435
10.2	Canal con obstáculo en el fondo (I)	437
10.3	Canal con obstáculo en el fondo (II)	439
10.4	Canal con cambio en la forma de la sección	441
10.5	Canal de sección trapezoidal	442
10.6	Canal con obstáculo en el fondo (III)	443
	Bibliografía	445

Apéndices

A	Álgebra y cálculo vectorial y tensorial	449
A.1	Coordenadas curvilíneas ortogonales	449
	Definición	449
	Bases de vectores	450
	Factores de escala	452
	Símbolos de Christoffel	452
	Elementos diferenciales	453
	Vector velocidad	453
	Gradiente	454
	Divergencia	455
	Rotacional	456
	Laplaciana	456
	Derivada sustancial de un campo escalar	456
	Derivada sustancial del campo de velocidad (acceleración)	457
A.2	Coordenadas cartesianas	457
	Definición	457
	Bases de vectores	457
	Factores de escala	458
	Símbolos de Christoffel	458
	Elementos diferenciales	458
	Vector de posición	458
	Vector velocidad	459
	Gradiente	459
	Divergencia	460
	Rotacional	461
	Laplaciana	462
	Derivada convectiva	462
A.3	Coordenadas cilíndricas	464
	Definición	464
	Bases de vectores	464
	Factores de escala	465
	Símbolos de Christoffel	466
	Elementos diferenciales	466
	Vector de posición	466
	Vector velocidad	466
	Gradiente	467
	Divergencia	467

	Rotacional	467
	Laplaciana	468
	Derivada convectiva	468
A.4	Coordenadas esféricas	468
	Definición	468
	Bases de vectores	469
	Factores de escala	470
	Símbolos de Christoffel	470
	Elementos diferenciales	470
	Vector de posición	470
	Vector velocidad	470
	Gradiente	471
	Divergencia	472
	Rotacional	472
	Laplaciana	472
	Derivada convectiva	473
B	Relación de ecuaciones	475
B.1	Ecuaciones de conservación en forma integral	475
	B.1.1 Ecuación de conservación de la masa	475
	B.1.2 Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento	476
	B.1.3 Ecuación de conservación de la energía	477
B.2	Ecuaciones de conservación en forma diferencial	480
	B.2.1 Masa	480
	Coordenadas cartesianas	480
	Coordenadas cilíndricas	480
	Coordenadas esféricas	480
	B.2.2 Cantidad de movimiento	480
	B.2.2.1 Fluidos en reposo	481
	B.2.2.2 Flujo de un fluido incompresible con viscosidad uniforme	481
	Coordenadas cartesianas	481
	Coordenadas cilíndricas	482
	Coordenadas esféricas	482
	B.2.3 Energía interna	482
	B.2.4 Entropía	482
B.3	Flujos laminares, estacionarios y unidireccionales de líquidos	483
B.4	Flujos de fluidos ideales	483
	B.4.1 Ecuación de Euler-Bernoulli	483
	B.4.2 Flujos de líquidos ideales	484

B.4.2.1 Ecuación de Bernoulli	484
B.4.3 Flujos de gases ideales	484
B.4.3.1 Relaciones entre variables termodinámicas y magnitudes de remanso	484
B.4.3.2 Movimiento cuasiunidimensional en conductos con magnitudes de remanso constantes	485
B.4.3.3 Movimientos con superficies de discontinuidad. Ondas de choque normales	485
B.5 Flujos turbulentos	486
B.5.1 Ecuación de conservación de la energía mecánica en flujos estacionarios en tuberías	486
B.5.2 Ecuación de conservación de la energía mecánica en flujos no estacionarios en tuberías de sección constante	487
B.6 Máquinas de fluidos	487
B.6.1 Ecuación de conservación de la energía	487
B.6.2 Definición de alturas y rendimientos	488
B.6.2.1 Bombas hidráulicas	488
B.6.2.2 Turbinas hidráulicas	490
B.6.3 Pérdidas de energía en la instalación	492
C Propiedades físicas, tablas y diagramas	493
Índice alfabético	501

Capítulo 2

Estática de fluidos

Problema 2.1. Atmósfera isoterma

Determinar la variación con la altura de la presión y la densidad en una atmósfera isoterma a temperatura $T = 288 \text{ K}$, suponiendo que la presión en la superficie del terreno es $p_0 = 1,013 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$.

Solución

Aplicando la ecuación (B.2.10) (con $U = gz$; eje z con sentido positivo hacia arriba) y utilizando la ecuación de estado de los gases perfectos, resulta

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -g \frac{p}{RT}. \quad (2.1.1)$$

Integrando desde $z = 0$ hasta una altura genérica z ,

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = - \int_0^z \frac{g}{RT} dz,$$

se obtiene

$$p = p_0 \exp \left[-\frac{gz}{RT} \right],$$

y teniendo en cuenta la ecuación de estado,

$$\rho = \frac{p_0}{RT} \exp \left(-\frac{gz}{RT} \right).$$

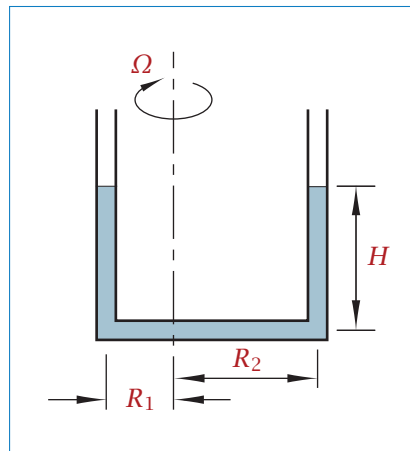
Sustituyendo valores, resulta

$$p = 1,013 \times 10^5 \exp(-1,19 \times 10^{-4} z), \quad \rho = 1,226 \exp(-1,19 \times 10^{-4} z)$$

(p en N m^{-2} , ρ en kg m^{-3} y z en m).

Problema 2.2. Rotación de un tubo en U que contiene dos líquidos inmiscibles

El tubo en U de la figura, abierto en los dos extremos, se encuentra inicialmente en reposo y lleno de agua hasta una altura $H = 12$ cm (situación representada en la figura).



A continuación se añade a una de las ramas (la que aparece a la derecha en la figura) una columna de aceite de densidad $\rho_{ac} = 800 \text{ kg m}^{-3}$, de altura $\Delta z = 5$ cm. Se despreciarán los efectos de tensión superficial y se supondrá que el radio del tubo es pequeño frente a las restantes longitudes indicadas.

- a) Determinar la altura que alcanzará la superficie libre del líquido en cada una de las ramas.

A continuación se hace girar el tubo a una velocidad $\Omega = 5 \text{ rad s}^{-1}$ alrededor del eje indicado en la figura ($R_1 = 6$ cm, $R_2 = 12$ cm).

b) Calcular el nuevo nivel que alcanzará el líquido en cada rama.

Explicar qué ocurriría si se aumentase progresivamente el valor de Ω a partir de la situación descrita en el apartado b).

Solución

a) Sean z_1 y z_2 las alturas que alcanza el agua en las ramas de la izquierda y de la derecha, respectivamente, una vez añadido el aceite. La conservación del volumen de agua requiere que se cumpla

$$z_1 + z_2 = 2H. \quad (2.2.1)$$

Integrando la ecuación (B.2.10) de la estática en el agua,

$$\frac{dp}{dU} = -\rho_{ag}, \quad (2.2.2)$$

entre la superficie libre del agua en la rama de la izquierda (1) y la superficie de separación agua-aceite (2), teniendo en cuenta que $U = gz$, se obtiene

$$p_2 - p_{at} = \rho_{ag}g(z_1 - z_2). \quad (2.2.3)$$

Integrando la ecuación de la estática en el aceite entre la superficie libre del aceite en la rama de la derecha y la superficie de separación agua-aceite, se obtiene

$$p_2 - p_{at} = \rho_{ac}g\Delta z. \quad (2.2.4)$$

De las ecuaciones (2.2.3) y (2.2.4) resulta

$$z_1 - z_2 = \frac{\rho_{ac}}{\rho_{ag}} \Delta z,$$

y, teniendo en cuenta la ecuación (2.2.1), se obtiene finalmente

$$z_1 = 0,14 \text{ m},$$

$$z_2 = 0,10 \text{ m}.$$

b) El potencial de fuerzas másicas es en este caso

$$U = gz - \frac{\Omega^2 r^2}{2}.$$

Integrando de nuevo la ecuación (2.2.2) entre la superficie libre del agua en la rama de la izquierda y la superficie de separación agua-aceite, se obtiene ahora

$$p_2 - p_{at} = \rho_{ag}g(z_1 - z_2) - \rho_{ag} \frac{\Omega^2}{2} (R_1^2 - R_2^2). \quad (2.2.5)$$

Integrando la ecuación de la estática en el aceite entre la superficie libre del aceite en la rama de la derecha y la superficie de separación agua-aceite, se obtiene de nuevo la ecuación (2.2.4). De las ecuaciones (2.2.4) y (2.2.5) resulta

$$z_1 - z_2 = \frac{\rho_{ac}}{\rho_{ag}} \Delta z + \frac{\Omega^2}{2g} (R_1^2 - R_2^2),$$

y teniendo en cuenta la ecuación (2.2.1), se obtiene finalmente

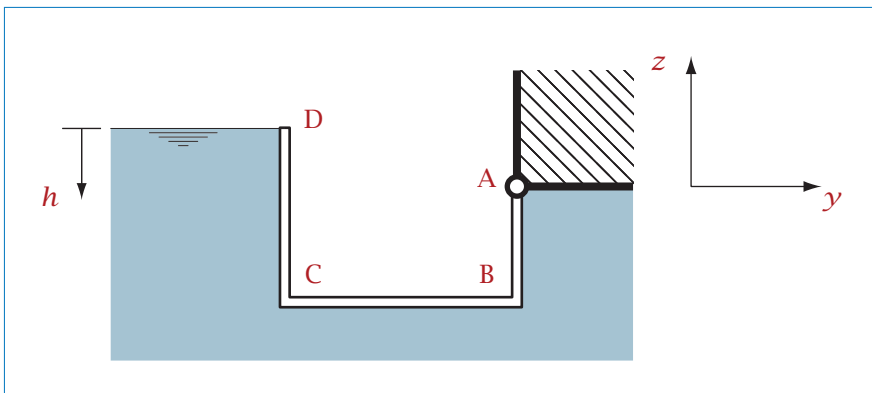
$$z_1 = 0,133 \text{ m},$$

$$z_2 = 0,107 \text{ m}.$$

Explíquese qué ocurriría si, a partir de esta situación de equilibrio, se aumentara progresivamente el valor de Ω .

Problema 2.3. Fuerza sobre una compuerta giratoria

La anchura de la compuerta ABCD de la figura es de 2 m, y las restantes dimensiones son $\overline{AB} = 1 \text{ m}$, $\overline{BC} = 2 \text{ m}$ y $\overline{CD} = 1,5 \text{ m}$. La superficie libre del agua alcanza el nivel indicado en la figura.



- a) Calcular la resultante de las fuerzas de superficie que ejerce el agua sobre la compuerta y el momento de dichas fuerzas respecto del eje A.
- b) Calcular el punto de aplicación de la fuerza resultante sobre cada una de las caras de la compuerta.

Solución

a) La condición de equilibrio estático en el fluido es

$$dp/dh = \rho g, \quad (2.3.1)$$

siendo h la profundidad desde la superficie libre del agua.¹ Al ser el fluido de densidad constante, integrando se obtiene la distribución de presión

$$p = p_{\text{at}} + \rho gh,$$

donde p_{at} es la presión atmosférica. La fuerza que se ejerce sobre la superficie de la compuerta en contacto con el agua es

$$\mathbf{F}_1 = \int_{ABCD} -p\mathbf{n}_1 dS = \int_{ABCD} -(p_{\text{at}} + \rho gh)\mathbf{n}_1 dS,$$

siendo \mathbf{n}_1 el vector unitario normal a la superficie de la compuerta, con sentido positivo desde la compuerta hacia el agua. Sobre la superficie exterior de la compuerta, en contacto con el aire, actúa la presión atmosférica, por lo que la fuerza que se ejerce sobre ella es

$$\mathbf{F}_2 = \int_{ABCD} -p_{\text{at}}\mathbf{n}_2 dS,$$

siendo \mathbf{n}_2 el vector unitario normal a la superficie de la compuerta, con sentido positivo desde la compuerta hacia el aire. Dado que $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$ en cada elemento de superficie de la compuerta, se obtiene que la fuerza total que se ejerce sobre la compuerta es

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \int_{ABCD} -\rho gh\mathbf{n}_1 dS. \quad (2.3.2)$$

¹ En numerosos problemas se utilizará la profundidad, h , con sentido opuesto al de la coordenada z . Obsérvese el signo diferente en las ecuaciones (2.1.1) y (2.3.1).

Puede observarse que se obtiene esta misma expresión si solo se considera la fuerza que se ejerce sobre la superficie de la compuerta en contacto con el agua (sin tener en cuenta la que se ejerce sobre la superficie en contacto con el aire), siempre que se utilicen en el cálculo presiones manométricas en lugar de presiones absolutas (haciendo, por tanto, $p_{\text{at}} = 0$). En tal caso, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1$ (ya que $\mathbf{F}_2 = 0$). Esto es lo que habitualmente se hará en otros problemas de este tipo, en los que aparecen líquidos en contacto con sólidos sometidos exteriormente a una presión atmosférica uniforme; es decir, se determinará la fuerza que se ejerce sobre la superficie del sólido en contacto con líquidos empleando en el cálculo presiones manométricas. Aunque, en este caso, para obtener la ecuación (2.3.2) se ha tenido en cuenta que $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$ al tratarse de una compuerta delgada, este resultado puede generalizarse a cuerpos de forma arbitraria teniendo en cuenta que la resultante de las fuerzas de presión (por ejemplo, las debidas a la presión atmosférica) que actúan uniformemente sobre una superficie cerrada es nula.

Se tomará un sistema de coordenadas con el eje x coincidente con el eje A (sentido saliente del papel positivo), el eje y en el plano de la figura, con dirección horizontal y sentido positivo hacia la derecha, y el eje z en dirección vertical y sentido positivo hacia arriba. Se va a descomponer la integral de la ecuación (2.3.2) en las contribuciones debidas a las tres superficies planas de la compuerta:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{AB} &= - \int_{0,5}^{1,5} \rho g h \mathbf{j} b \, dh = -19\,600 \mathbf{j} \quad (\mathbf{n}_1 = \mathbf{j}), \\ \mathbf{F}_{BC} &= - \int_{-2}^0 \rho g (1,5) (-\mathbf{k}) b \, dy = 58\,800 \mathbf{k} \quad (\mathbf{n}_1 = -\mathbf{k}), \\ \mathbf{F}_{CD} &= - \int_0^{1,5} \rho g h (-\mathbf{j}) b \, dh = 22\,050 \mathbf{j} \quad (\mathbf{n}_1 = -\mathbf{j}), \end{aligned}$$

siendo b la anchura de la compuerta (valores de las fuerzas expresados en N). La fuerza resultante (expresada en N) es

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{BC} + \mathbf{F}_{CD} = 2450 \mathbf{j} + 58\,800 \mathbf{k}.$$

Análogamente pueden obtenerse los momentos respecto del eje A de las fuerzas de superficie que se ejercen sobre cada una de las superficies planas (la única componente es según el eje x):²

$$\mathbf{M}_{AB} = \int_{0,5}^{1,5} \rho g h (h - 0,5) (-\mathbf{i}) b \, dh = -11\,433 \mathbf{i},$$

² En cualquier problema, en las ecuaciones en las que aparezcan valores numéricos de magnitudes dimensionales, sin indicación de las unidades en las que están expresados, se entenderá que estas serán las correspondientes del Sistema Internacional.

$$M_{BC} = \int_{-2}^0 \rho g(1,5) y i b dy = -58\,800 \mathbf{i},$$

$$M_{CD} = \int_0^{1,5} \rho g h(h - 0,5) i b dh = 11\,025 \mathbf{i}$$

(valores expresados en N m).

El momento total (expresado en N m) es

$$M = M_{AB} + M_{BC} + M_{CD} = -59\,208 \mathbf{i}.$$

(sentido entrante al papel).

b) Las coordenadas que definen los puntos de corte de las líneas de acción de las fuerzas con las correspondientes superficies planas son las siguientes (la coordenada x es siempre la del plano medio de la compuerta, al ser el problema bidimensional):

$$z_{AB} = -\frac{M_{AB}}{F_{AB}} = -0,5833 \text{ m},$$

$$y_{BC} = -\frac{M_{BC}}{F_{BC}} = -1 \text{ m},$$

$$z_{CD} = -\frac{M_{CD}}{F_{CD}} = -0,5 \text{ m}$$

(M_{AB} , F_{AB} , ..., denotan los módulos de los vectores correspondientes).

Es obvio que se podía anticipar el resultado $y_{BC} = -1$ m, y también, si se han resuelto anteriormente otros problemas de este tipo, que la línea de acción de la fuerza sobre la cara CD debe estar a una distancia de $\frac{1}{3}\overline{CD}$ desde el punto C. También podría haberse calculado F_{BC} teniendo en cuenta que su módulo ha de ser igual al peso del líquido que existirá por encima de la cara BC hasta la superficie libre. Asimismo podría haberse utilizado el concepto de prisma de presiones, empleado fórmulas de momentos de inercia, etc. Aunque obviamente puede elegirse el procedimiento de resolución que se considere más conveniente, la experiencia demuestra que suelen cometerse menos errores si se utiliza un planteamiento de tipo más general y sistemático, como el empleado en este problema.

Problema 2.4. Distribución de presión en un líquido en reposo de densidad no uniforme

La densidad de un líquido contenido en un depósito varía linealmente con la profundidad, siendo de 1 g cm^{-3} en la superficie libre y de $1,2 \text{ g cm}^{-3}$ a una profundidad de 4 m. El gas situado sobre la superficie libre del líquido está a una presión absoluta de $1,2 \text{ kgf cm}^{-2}$. Determinar la presión a una profundidad de 2 m.

Solución

La ley de variación de la densidad en el depósito viene dada por

$$\rho = 1000 + 50h \quad (\rho \text{ en kg m}^{-3}, h \text{ (profundidad) en m}). \quad (2.4.1)$$

Integrando la ecuación (B.2.10) de la estática ($U = gz$; z es la coordenada vertical; $dz = -dh$),³

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \Rightarrow \frac{dp}{dh} = \rho g,$$

una vez introducida la ecuación (2.4.1),

$$p(h = 2) = p(h = 0) + g \int_0^2 (1000 + 50h) dh,$$

se obtiene⁴

$$p(h = 2) = 138\,180 \text{ N m}^{-2}.$$

Problema 2.5. Compuerta vertical que separa dos líquidos, uno de ellos de densidad no uniforme

En la figura se representa una sección de un tanque de base cuadrada, de 3 m de lado, abierto a la atmósfera y dividido mediante una compuerta vertical en dos depósitos de iguales dimensiones. La compuerta puede girar sin ro-

³ Véase la nota 1 al pie de la página 37.

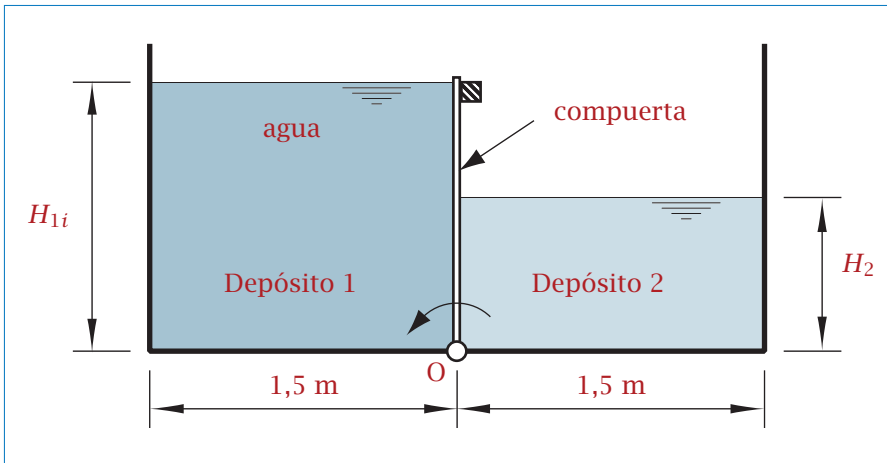
⁴ Véase la nota 2 al pie de la página 38.

zamiento alrededor del eje O, en el sentido indicado en la figura. El depósito de la izquierda (1) contiene inicialmente agua hasta una altura $H_{1i} = 2,5$ m, y el de la derecha (2) un líquido de densidad no uniforme, ρ_2 , hasta una altura $H_2 = 1,5$ m. La variación de ρ_2 con la profundidad h puede aproximarse de la forma siguiente:

$$\rho_2 = \rho_0 = 800 \text{ kg m}^{-3}, \quad 0 \leq h \leq 0,5,$$

$$\rho_2 = \rho_0 (0,75 + h/2), \quad 0,5 < h \leq 1,5 \quad (\rho \text{ en kg m}^{-3}, h \text{ en m}).$$

- a) Determinar la ley de variación de la presión con la profundidad h en el líquido contenido en el depósito 2.
- b) Calcular la magnitud y el punto de aplicación de la fuerza ejercida sobre la compuerta por el líquido del depósito 2.



En un instante dado se abre a la atmósfera un orificio de área $A = 2 \text{ cm}^2$ situado en el fondo del depósito 1.

- c) Determinar la altura H_1 de la superficie libre del agua en el depósito 1 en el instante en que la compuerta comienza a girar. Se supondrá que la velocidad del agua en el depósito 1 es suficientemente pequeña, de forma que puede aplicarse la ecuación de la estática.

Solución

- a) Integrando la ecuación (B.2.10) de la estática (con $U = gz$, y tomando h en

sentido opuesto a la coordenada vertical z , $dh = -dz$),

$$\frac{dp}{dh} = \rho_2 g,$$

se obtiene, para $0 \leq h \leq 0,5$,

$$p = \rho_0 g h = 7848 h, \quad (2.5.1)$$

y, para $0,5 < h \leq 1,5$,

$$p = \int_0^{0,5} \rho_0 g dh + \int_{0,5}^h \rho_0 g \left(0,75 + \frac{1}{2}h\right) dh,$$

de donde resulta finalmente

$$p = 490,5 + 5886 h + 1962 h^2 \quad (2.5.2)$$

(p es presión manométrica, en N m^{-2} ; h en m; se ha tomado $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$).

b) La fuerza sobre la compuerta debida al líquido del depósito 2 (horizontal y con sentido hacia la izquierda, evidentemente) es

$$F = \int_{S_c} p dS = \int_0^{1,5} p b dh,$$

siendo b la anchura de la compuerta y S_c su superficie en contacto con el líquido. Sustituyendo la distribución de presión obtenida en el apartado anterior,

$$F = b \int_0^{0,5} 7848 h dh + b \int_{0,5}^{1,5} (490,5 + 5886 h + 1962 h^2) dh,$$

e integrando, resulta

$$F = 28449 \text{ N.}$$

El momento de la distribución de fuerzas debidas a la presión (respecto del eje que coincide con la línea de contacto entre la superficie libre del agua y la compuerta, por ejemplo), debe ser igual al momento de la fuerza resultante sobre la compuerta:

$$\int_{S_c} p h dS = \int_0^{1,5} p b h dh = F h_m, \quad (2.5.3)$$

siendo h_m la profundidad del punto de aplicación de la fuerza resultante. De la ecuación (2.5.3), sustituyendo en ella las ecuaciones (2.5.1) y (2.5.2), se obtiene

$$h_m = \frac{b}{F} \left[\int_0^{0,5} 7848 h^2 dh + \int_{0,5}^{1,5} (490,5 h + 5886 h^2 + 1962 h^3) dh \right],$$

de donde resulta

$$h_m = 1,018 \text{ m.}$$

c) Es fácil deducir que la fuerza que ejerce sobre la compuerta el agua contenida en el depósito 1 es

$$F_1 = b\rho_1g \frac{1}{2}H_1^2,$$

estando situada su línea de acción a una altura $H_1/3$ respecto del fondo del depósito. En el instante en que la compuerta empieza a girar, se igualan los momentos respecto del eje O de las fuerzas que se ejercen sobre ambas caras de la compuerta:

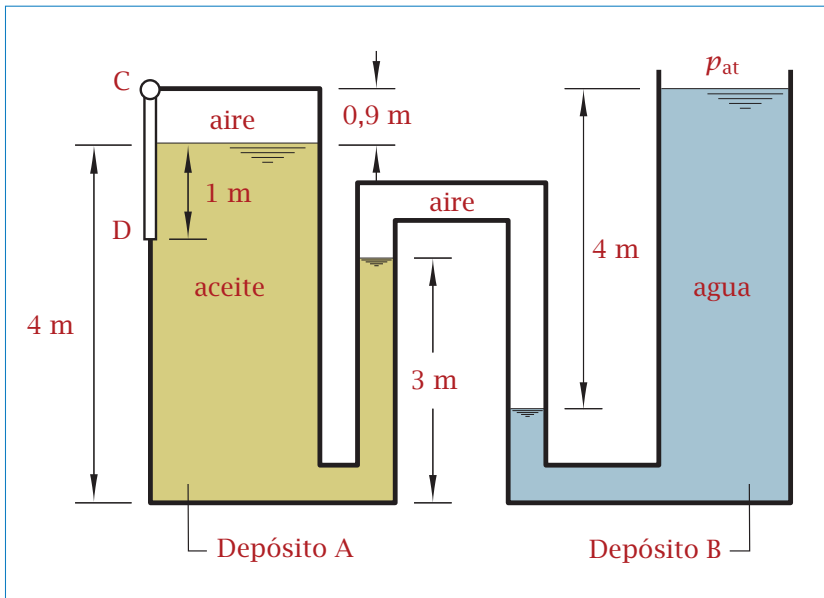
$$F(H_2 - h_m) = b\rho_1g \frac{1}{2}H_1^2 \frac{1}{3}H_1,$$

de donde se obtiene

$$H_1 = 1,409 \text{ m.}$$

Problema 2.6. Equilibrio entre aire, agua y aceite en dos depósitos conectados por una tubería

En el sistema de la figura, la densidad del aceite contenido en el depósito A es uniforme e igual a 900 kg m^{-3} y el depósito B está abierto a la atmósfera.



Calcular:

- Las presiones del aire en el depósito A y en la tubería que conecta ambos depósitos.
- La magnitud (por unidad de anchura) y el punto de aplicación de la fuerza que se ejerce sobre la compuerta CD indicada en la figura.

Solución

a) Integrando la ecuación (B.2.10) de la estática en el agua (con $U = gz$), entre las superficies libres en el depósito B y en la tubería (entre las que existe una diferencia de cotas $\Delta z_B = 4$ m), resulta

$$\rho_{ag}g\Delta z_B = p_T,$$

de donde se obtiene la presión manométrica del aire en la tubería,

$$p_T = (1000)(9,81)(4) = 39\,240 \text{ N m}^{-2}.$$

Análogamente, integrando la ecuación de la estática en el aceite, entre las superficies libres en el depósito A y en la tubería (entre las que existe una diferencia de cotas $\Delta z_A = 1$ m), resulta

$$p_A + \rho_{ac}g\Delta z_A = p_T,$$

de donde se obtiene la presión manométrica del aire en el depósito A,

$$p_A = 39\,240 - (900)(9,81)(1) = 30\,411 \text{ N m}^{-2}.$$

b) Se supondrá que el problema es bidimensional. La fuerza por unidad de anchura sobre la compuerta (horizontal y con sentido hacia la izquierda, evidentemente) es

$$F = \int_{-0,9}^1 p \, dh, \quad (2.6.1)$$

siendo h la profundidad desde la superficie libre del aceite en el depósito A. Se utilizarán presiones manométricas para tener en cuenta la fuerza debida a la presión atmosférica que actúa en la superficie exterior de la compuerta. La presión es $p = p_A$ para $h \leq 0$ y $p = p_A + \rho_{ac}gh$ para $h > 0$, con lo que, de la ecuación (2.6.1),

$$F = \int_{-0,9}^0 p_A \, dh + \int_0^1 (p_A + \rho_{ac}gh) \, dh = (30\,411)(1,9) + (900)(9,81) \frac{(1)^2}{2},$$