

# Índice general

---

<b>Prólogo</b>	<b>19</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>21</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>27</b>
1.1 Fuerza de superficie . . . . .	27
1.2 Fuerza másica sobre una partícula fluida . . . . .	28
1.3 Momento de fricción sobre un disco . . . . .	29
1.4 Tensor de tensiones y fuerza de superficie . . . . .	30
1.5 Viscosímetro troncocónico . . . . .	30
1.6 Potencia de giro de un eje en un cojinete . . . . .	31
<b>2 Estática de fluidos</b>	<b>33</b>
2.1 Atmósfera isoterma . . . . .	33
2.2 Rotación de un tubo en U que contiene dos líquidos inmiscibles	34
2.3 Fuerza sobre una compuerta giratoria . . . . .	36
2.4 Distribución de presión en un líquido en reposo de densidad no uniforme . . . . .	40
2.5 Compuerta vertical que separa dos líquidos, uno de ellos de densidad no uniforme . . . . .	40
2.6 Equilibrio entre aire, agua y aceite en dos depósitos conectados por una tubería . . . . .	43
2.7 Energía asociada a la tensión superficial en gotas de agua . . .	45
2.8 Ascenso de agua por un tubo capilar con el extremo cerrado .	46
2.9 Ascenso capilar de agua entre dos placas verticales paralelas	47
2.10 Equilibrio en un tubo capilar tras introducirlo verticalmente en agua por su extremo abierto . . . . .	48

2.11	Medida de la aceleración de un depósito mediante un manómetro con forma de tubo en U parcialmente sumergido en el líquido que contiene . . . . .	50
2.12	Equilibrio de un cilindro sumergido apoyado longitudinalmente sobre el terreno . . . . .	51
2.13	Equilibrio de un gas en un depósito en rotación . . . . .	52
2.14	Equilibrio de un émbolo dentro de un cilindro que contiene aceite . . . . .	53
2.15	Cuerpo flotante sobre dos capas de líquidos inmiscibles . . . . .	56
2.16	Tubo en U inmerso en un depósito giratorio . . . . .	59
2.17	Equilibrio de un cilindro sumergido apoyado longitudinalmente en el fondo y separando dos líquidos . . . . .	62
2.18	Compuerta recta e inclinada que separa dos líquidos, uno de ellos de densidad no uniforme . . . . .	65
2.19	Compuerta con forma de cuadrante circular . . . . .	66
2.20	Fuerza y momento que ejercen tres capas de líquidos inmiscibles sobre una compuerta . . . . .	69
2.21	Equilibrio en un depósito con paredes articuladas y accionadas mediante muelles . . . . .	72
2.22	Equilibrio de cuerpos totalmente sumergidos . . . . .	75
2.23	Compuerta con forma de sector circular . . . . .	78
2.24	Forma de la superficie libre y fuerzas sobre una compuerta en un depósito sometido a aceleración lineal . . . . .	80
<b>3</b>	<b>Cinemática de fluidos</b>	<b>83</b>
3.1	Determinación de la velocidad de una partícula fluida a partir de su trayectoria en coordenadas cilíndricas . . . . .	83
3.2	Determinación del campo de aceleración . . . . .	84
3.3	Líneas de corriente y derivada sustancial de la concentración de un contaminante . . . . .	85
3.4	Cálculo de la línea de traza (I) . . . . .	86
3.5	Determinación del potencial de un campo de velocidad en coordenadas polares . . . . .	87
3.6	Vórtice libre . . . . .	88
3.7	Cinemática de un flujo estacionario e incompresible . . . . .	89
3.8	Cálculo de la línea de traza (II) . . . . .	91
3.9	Senda y aceleración de partículas fluidas y línea de traza . . . . .	92
3.10	Aceleración de una partícula fluida . . . . .	93
3.11	Posición y aceleración de una partícula fluida en un determinado instante . . . . .	94

<b>4</b>	<b>Ecuaciones de conservación en forma diferencial</b>	<b>95</b>
4.1	Campo de velocidad en un flujo de un líquido . . . . .	95
4.2	Campo de velocidad en un flujo incompresible . . . . .	96
4.3	Campo de velocidad no estacionario y ley de variación de la densidad con el tiempo . . . . .	97
4.4	Densidad de una partícula fluida en función del tiempo en un campo de velocidad estacionario . . . . .	98
4.5	Función de corriente en un campo de velocidad en coordenadas polares . . . . .	98
4.6	Función de corriente y flujo volumétrico (I) . . . . .	100
4.7	Determinación del tensor de tensiones viscosas a partir del campo de velocidad . . . . .	100
4.8	Determinación de la distribución de presión a partir del campo de velocidad . . . . .	101
4.9	Principios de conservación y ecuaciones generales de la mecánica de fluidos (I) . . . . .	103
4.10	Principios de conservación y ecuaciones generales de la mecánica de fluidos (II) . . . . .	104
4.11	Función de corriente y flujo volumétrico (II) . . . . .	105
4.12	Irrotacionalidad y determinación del potencial de velocidad y la distribución de presión a partir de la función de corriente . . . . .	106
4.13	Evolución de la densidad y la presión en la expansión de un gas en un cilindro . . . . .	106
4.14	Vorticidad, circulación y presión en un vórtice de Rankine . . . . .	107
4.15	Posición y densidad de una partícula fluida en función del tiempo . . . . .	111
<b>5</b>	<b>Ecuaciones de conservación en forma integral</b>	<b>113</b>
5.1	Variación de la densidad de un gas en un cilindro (I) . . . . .	113
5.2	Incremento de la temperatura del agua a través de una turbina . . . . .	115
5.3	Compresor de aire . . . . .	115
5.4	Equilibrio de un sistema de émbolos y cilindros sobre el que incide un chorro de agua . . . . .	117
5.5	Impacto oblicuo sobre un deflector plano del agua descargada por gravedad desde un depósito . . . . .	121
5.6	Fuerza sobre un tubo acodado por el que circula un gas . . . . .	126
5.7	Flujo a través del rotor y el estator en un compresor axial . . . . .	127
5.8	Sistema de freno hidrodinámico de una plataforma mediante un deflector . . . . .	131
5.9	Conducto acodado que atraviesa la pared de separación de dos recintos a distinta presión . . . . .	135

5.10	Descarga de un chorro de agua desde un tubo vertical . . . . .	138
5.11	Descarga de chorros de agua en depósitos e impacto oblicuo de un chorro sobre una placa plana que se mueve en dirección normal a sí misma . . . . .	141
5.12	Flujo a través de una unión de tuberías en Y . . . . .	157
5.13	Vehículo de colchón de aire . . . . .	159
5.14	Acoplamiento hidro-neumático entre dos cilindros . . . . .	163
5.15	Flujo de agua en una tubería acodada. Fuerza sobre la tubería y potencia disipada en el agua . . . . .	165
5.16	Flujo de aire a través de una tubería porosa seguida de un difusor cónico . . . . .	167
5.17	Flujo sobre una placa plana . . . . .	170
5.18	Desviación de un chorro de líquido mediante un deflector . . . . .	171
5.19	Flujo en un aspersor de riego plano (I) . . . . .	174
5.20	Impacto normal de un chorro sobre una placa plana móvil . . . . .	177
5.21	Propagación de una onda en un canal . . . . .	183
5.22	Propulsión de un cohete . . . . .	184
5.23	Depósito móvil autopropulsado mediante un chorro . . . . .	188
5.24	Proceso de inflado de un globo . . . . .	189
5.25	Flujo incompresible, no estacionario y unidimensional en un conducto con sección de área variable . . . . .	189
5.26	Flujo en un aspersor de riego plano (II) . . . . .	192
5.27	Turbina hidráulica . . . . .	193
5.28	Generación de una ola en un cilindro por el movimiento de un pistón . . . . .	197
5.29	Turbina eólica . . . . .	199
5.30	Globo aerostático . . . . .	202
5.31	Impacto de un chorro horizontal de agua sobre una placa plana suspendida y articulada en su extremo superior . . . . .	206
5.32	Resalto hidráulico anular . . . . .	209
5.33	Desplazamiento de un móvil a través de un conducto que contiene un fluido en reposo . . . . .	211
5.34	Impacto de chorros normales y oblicuos sobre cuerpos en reposo y en movimiento . . . . .	212
5.35	Bomba de inyección . . . . .	217
5.36	Proceso de llenado con aire de un depósito desde otro depósito de grandes dimensiones . . . . .	221
5.37	Flujo debido a una fuente bidimensional . . . . .	223
5.38	Flujo en un aspersor de riego no plano . . . . .	226
5.39	Ventilación y ensayo de incendio en un túnel de carretera . . . . .	229

5.40	Flujo alrededor de un obstáculo . . . . .	233
5.41	Regulación neumática del movimiento de los émbolos del Problema 5.14 . . . . .	238
5.42	Flujo a través de un conducto de sección rectangular y paredes porosas . . . . .	239
5.43	Propulsión mediante un chorro de un cuerpo flotante . . . . .	241
5.44	Flujo a través de un conducto acodado con sección de área variable . . . . .	241
5.45	Fuerza y momento de fuerzas sobre un elemento de tubería con bifurcación . . . . .	244
5.46	Fuerza sobre un tubo acodado por el que circula un flujo no uniforme idealizado . . . . .	246
5.47	Variación de la densidad de un gas en un cilindro (II) . . . . .	247
<b>6</b>	<b>Análisis dimensional</b>	<b>249</b>
6.1	Momento de fricción sobre un disco . . . . .	249
6.2	Descarga del líquido contenido en un depósito a través de un tubo . . . . .	251
6.3	Caída de presión en una válvula . . . . .	254
6.4	Fuerza de empuje en hélices de avión . . . . .	256
6.5	Caída de un cuerpo con movimiento oscilatorio . . . . .	257
6.6	Transmisión de calor por convección natural entre un fluido y un cuerpo sólido . . . . .	258
6.7	Ruptura de una gota en una corriente de gas . . . . .	259
6.8	Semejanza en bombas hidráulicas . . . . .	260
6.9	Transmisión de calor en un flujo por convección forzada entre dos placas planas paralelas . . . . .	261
6.10	Flujo en la cámara de inyección de una máquina de fundición	263
6.11	Sistema de separación de semillas . . . . .	264
6.12	Inyección de metal líquido en un molde . . . . .	265
6.13	Explosión en aire . . . . .	266
6.14	Semejanza parcial en ensayos con un metal líquido y con agua	266
6.15	Fuerza oscilatoria sobre un cuerpo romo inducida por desprendimiento de torbellinos . . . . .	268
6.16	Impacto de una gota sobre una superficie sólida . . . . .	270
<b>7</b>	<b>Flujos con efectos de viscosidad dominantes</b>	<b>273</b>
7.1	Flujo en la zona de entrada de una tubería . . . . .	273
7.2	Descarga por gravedad de un depósito a través de un conducto bidimensional . . . . .	275

7.3	Flujo entre dos placas planas paralelas . . . . .	276
7.4	Flujo de una lámina de líquido sobre un plano inclinado (I) . . . . .	277
7.5	Flujo longitudinal entre dos cilindros coaxiales (I) . . . . .	279
7.6	Flujo acimutal entre dos cilindros coaxiales . . . . .	279
7.7	Flujo de aceite a través de un conducto . . . . .	281
7.8	Flujo en un cojinete cilíndrico . . . . .	282
7.9	Refrigerador de aceite . . . . .	282
7.10	Flujo longitudinal entre dos cilindros coaxiales (II) . . . . .	284
7.11	Viscosímetro de placa plana . . . . .	285
7.12	Viscosímetro de cilindros concéntricos . . . . .	287
7.13	Amortiguador de aceite . . . . .	288
7.14	Ascenso de una burbuja de aire en un tubo que contiene aceite . . . . .	291
7.15	Viscosímetro de cono y placa . . . . .	293
7.16	Flujo de dos líquidos en capas superpuestas sobre un plano inclinado . . . . .	294
7.17	Flujo de aceite con temperatura variable a través de un sistema de tubos en paralelo . . . . .	294
7.18	Flujo sobre una cinta transportadora inclinada . . . . .	296
7.19	Descarga no isoterma a través de un conducto del líquido contenido en un depósito cerrado . . . . .	297
7.20	Flujo entre una placa plana y un disco giratorio . . . . .	298
7.21	Flujo a través de un conducto bidimensional con paredes porosas . . . . .	301
7.22	Flujo de una lámina de líquido sobre un plano inclinado (II) . . . . .	302
<b>8</b>	<b>Flujos de fluidos ideales</b> . . . . .	<b>305</b>
8.1	Descarga por gravedad de un depósito a través de un conducto . . . . .	305
8.2	Proceso de vaciado por gravedad del líquido contenido en un depósito a través de un orificio . . . . .	307
8.3	Reloj de agua (clepsidra) . . . . .	307
8.4	Caída de presión durante el cierre progresivo de una válvula en un conducto por el que circula agua . . . . .	309
8.5	Bombeo de un líquido mediante una unión de tuberías en forma de T . . . . .	310
8.6	Tobera convergente-divergente con condiciones conocidas en una cierta sección aguas arriba de la sección de garganta . . . . .	311
8.7	Proceso de llenado con aire de un depósito inicialmente vacío a través de una tobera convergente . . . . .	313
8.8	Flujo a través de un orificio practicado en la pared del cilindro superior del Problema 5.4 . . . . .	314

8.9	Flujo en una tobera convergente-divergente. Área mínima de la sección de garganta e influencia de la presión a la salida . .	315
8.10	Onda de choque en una tobera convergente-divergente . . . .	318
8.11	Procesos de descarga de un depósito a través de una tobera convergente-divergente con condiciones de tobera adaptada y de llenado mediante un compresor . . . . .	319
8.12	Flujo en la tobera convergente-divergente de un motor cohete	320
8.13	Procesos de llenado de un depósito a través de una tobera convergente-divergente y de descarga mediante una bomba de vacío . . . . .	321
8.14	Túnel supersónico . . . . .	323
8.15	Proceso de vaciado del cilindro inferior del Problema 5.14 . .	327
8.16	Tobera convergente-divergente funcionando con helio o aire (I)	328
8.17	Flujo compresible alrededor de un cuerpo romo . . . . .	328
8.18	Hipótesis de flujo cuasiestacionario en el proceso de vaciado de un depósito . . . . .	330
8.19	Determinación de la geometría de toberas . . . . .	331
8.20	Determinación de las áreas de la sección en la que existe una onda de choque y de la sección de salida de una tobera convergente-divergente . . . . .	332
8.21	Flujo a la salida de un motor cohete . . . . .	334
8.22	Flujo alrededor de un cilindro en rotación . . . . .	334
8.23	Influencia de la presión a la salida en el flujo en una tobera convergente-divergente . . . . .	336
8.24	Ecuación de Bernoulli en flujos rotacionales . . . . .	337
8.25	Apertura súbita del extremo inferior de un conducto que contiene agua . . . . .	337
8.26	Tubo aspersionador inclinado . . . . .	341
8.27	Flujo de aire en una tubería seguida de una tobera convergente. Cierre de una válvula . . . . .	343
8.28	Vórtice libre en el proceso de vaciado a través de un orificio de un depósito que contiene líquido . . . . .	345
8.29	Tobera convergente-divergente funcionando con helio o aire (II)	347
8.30	Acción del viento sobre un edificio . . . . .	350
8.31	Diseño básico de una tobera convergente-divergente. Funcionamiento fuera de diseño (I) . . . . .	352
8.32	Onda de choque generada por una explosión en la atmósfera	353
8.33	Proceso de vaciado e inmersión del cubo del Problema 2.15 .	353
8.34	Reflexión de una onda de choque normal sobre una pared . .	355

8.35	Mantenimiento de condiciones estacionarias en un depósito que se descarga a través de una tobera y es alimentado mediante un compresor . . . . .	357
8.36	Flujo en una tobera convergente-divergente. Determinación de condiciones de funcionamiento a partir de la presión en una sección de área dada . . . . .	358
8.37	Proceso de llenado con aire de un depósito a través de una tobera convergente-divergente . . . . .	360
8.38	Diseño básico de una tobera convergente-divergente. Funcionamiento fuera de diseño (II) . . . . .	362
8.39	Impacto de dos chorros de agua coaxiales . . . . .	363
8.40	Flujo en un estatorreactor . . . . .	363
<b>9</b>	<b>Flujos turbulentos</b>	<b>367</b>
9.1	Pérdida de carga en una tubería con fugas distribuidas . . . . .	367
9.2	Determinación del caudal a través de una fuga puntual en una tubería . . . . .	368
9.3	Determinación del número de estaciones de bombeo en una instalación . . . . .	370
9.4	Trasvase de agua mediante un sifón . . . . .	371
9.5	Instalación de conducción de agua y aceite entre depósitos . . . . .	373
9.6	Flujo en la zona acodada de un sifón con difusor a la salida . . . . .	377
9.7	Sistema de ventilación de un conducto con extremos abiertos . . . . .	380
9.8	Sistema de acondicionamiento de aire de un recinto . . . . .	382
9.9	Sistemas de llenado mediante bombeo y de descarga de un depósito . . . . .	385
9.10	Sistema de extracción de petróleo mediante agua salada . . . . .	389
9.11	Cálculo de la pérdida de carga en una tubería con fugas mediante la ecuación de Blasius . . . . .	390
9.12	Bombeo desde dos depósitos a un tercero más elevado . . . . .	391
9.13	Tiempo de descarga por gravedad a través de una tubería del líquido contenido en un depósito . . . . .	394
9.14	Caudal de descarga por gravedad de un depósito a través de una tubería con bifurcación . . . . .	396
9.15	Diámetro de una tubería de descarga por gravedad de un depósito . . . . .	397
9.16	Caudales en una tubería con bifurcación . . . . .	398
9.17	Sistema de bombeo. Rotura en la tubería de impulsión . . . . .	399
9.18	Cálculo de la presión necesaria en una instalación de riego . . . . .	401

9.19	Bomba con tubería de impulsión ramificada. Cálculo de los diámetros de las tuberías . . . . .	402
9.20	Trasvase de agua entre depósitos mediante una tubería salvando una elevación del terreno (I) . . . . .	403
9.21	Sistema de bombeo con dos bombas en serie . . . . .	404
9.22	Detección de fuga en un oleoducto . . . . .	408
9.23	Dimensiones básicas de una instalación de abastecimiento de agua . . . . .	410
9.24	Sistema de extracción del líquido contenido en un depósito mediante otro líquido inmiscible . . . . .	411
9.25	Conducción de agua con un tramo de tuberías en paralelo . . . . .	412
9.26	Diseño básico de un sistema de bombeo desde dos depósitos . . . . .	413
9.27	Trasvase de agua entre depósitos mediante una tubería salvando una elevación del terreno (II) . . . . .	415
9.28	Flujo de agua a través del sistema de tubos en paralelo del Problema 7.17 . . . . .	417
9.29	Embalse con chimenea de equilibrio . . . . .	417
9.30	Altura máxima de elevación en un sistema de bombeo (I) . . . . .	418
9.31	Altura máxima de elevación en un sistema de bombeo (II) . . . . .	420
9.32	Sistema de bombeo en circuito cerrado (I) . . . . .	421
9.33	Altura máxima de elevación en un sistema de bombeo (III) . . . . .	423
9.34	Hipótesis de flujo cuasiestacionario y tiempo de establecimiento del flujo en la descarga de un depósito por gravedad a través de una tubería . . . . .	425
9.35	Sistema de bombeo en circuito cerrado (II) . . . . .	428
9.36	Trasvase desde un depósito mediante bombeo con inyección lateral en la impulsión . . . . .	430
9.37	Sistema de bombeo en circuito cerrado (III) . . . . .	432
<b>10</b>	<b>Flujos en canales abiertos</b> . . . . .	<b>435</b>
10.1	Canal de sección rectangular con cambio de pendiente . . . . .	435
10.2	Canal con obstáculo en el fondo (I) . . . . .	437
10.3	Canal con obstáculo en el fondo (II) . . . . .	439
10.4	Canal con cambio en la forma de la sección . . . . .	441
10.5	Canal de sección trapezoidal . . . . .	442
10.6	Canal con obstáculo en el fondo (III) . . . . .	443
	<b>Bibliografía</b> . . . . .	<b>445</b>

## Apéndices

<b>A</b>	<b>Álgebra y cálculo vectorial y tensorial</b>	<b>449</b>
A.1	Coordenadas curvilíneas ortogonales . . . . .	449
	Definición . . . . .	449
	Bases de vectores . . . . .	450
	Factores de escala . . . . .	452
	Símbolos de Christoffel . . . . .	452
	Elementos diferenciales . . . . .	453
	Vector velocidad . . . . .	453
	Gradiente . . . . .	454
	Divergencia . . . . .	455
	Rotacional . . . . .	456
	Laplaciana . . . . .	456
	Derivada sustancial de un campo escalar . . . . .	456
	Derivada sustancial del campo de velocidad (acceleración) . . . . .	457
A.2	Coordenadas cartesianas . . . . .	457
	Definición . . . . .	457
	Bases de vectores . . . . .	457
	Factores de escala . . . . .	458
	Símbolos de Christoffel . . . . .	458
	Elementos diferenciales . . . . .	458
	Vector de posición . . . . .	458
	Vector velocidad . . . . .	459
	Gradiente . . . . .	459
	Divergencia . . . . .	460
	Rotacional . . . . .	461
	Laplaciana . . . . .	462
	Derivada convectiva . . . . .	462
A.3	Coordenadas cilíndricas . . . . .	464
	Definición . . . . .	464
	Bases de vectores . . . . .	464
	Factores de escala . . . . .	465
	Símbolos de Christoffel . . . . .	466
	Elementos diferenciales . . . . .	466
	Vector de posición . . . . .	466
	Vector velocidad . . . . .	466
	Gradiente . . . . .	467
	Divergencia . . . . .	467

	Rotacional . . . . .	467
	Laplaciana . . . . .	468
	Derivada convectiva . . . . .	468
A.4	Coordenadas esféricas . . . . .	468
	Definición . . . . .	468
	Bases de vectores . . . . .	469
	Factores de escala . . . . .	470
	Símbolos de Christoffel . . . . .	470
	Elementos diferenciales . . . . .	470
	Vector de posición . . . . .	470
	Vector velocidad . . . . .	470
	Gradiente . . . . .	471
	Divergencia . . . . .	472
	Rotacional . . . . .	472
	Laplaciana . . . . .	472
	Derivada convectiva . . . . .	473
<b>B</b>	<b>Relación de ecuaciones</b>	<b>475</b>
B.1	Ecuaciones de conservación en forma integral . . . . .	475
	B.1.1 Ecuación de conservación de la masa . . . . .	475
	B.1.2 Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento . . . . .	476
	B.1.3 Ecuación de conservación de la energía . . . . .	477
B.2	Ecuaciones de conservación en forma diferencial . . . . .	480
	B.2.1 Masa . . . . .	480
	Coordenadas cartesianas . . . . .	480
	Coordenadas cilíndricas . . . . .	480
	Coordenadas esféricas . . . . .	480
	B.2.2 Cantidad de movimiento . . . . .	480
	B.2.2.1 Fluidos en reposo . . . . .	481
	B.2.2.2 Flujo de un fluido incompresible con viscosidad uniforme . . . . .	481
	Coordenadas cartesianas . . . . .	481
	Coordenadas cilíndricas . . . . .	482
	Coordenadas esféricas . . . . .	482
	B.2.3 Energía interna . . . . .	482
	B.2.4 Entropía . . . . .	482
B.3	Flujos laminares, estacionarios y unidireccionales de líquidos	483
B.4	Flujos de fluidos ideales . . . . .	483
	B.4.1 Ecuación de Euler-Bernoulli . . . . .	483
	B.4.2 Flujos de líquidos ideales . . . . .	484

B.4.2.1 Ecuación de Bernoulli . . . . .	484
B.4.3 Flujos de gases ideales . . . . .	484
B.4.3.1 Relaciones entre variables termodinámicas y magnitudes de remanso . . . . .	484
B.4.3.2 Movimiento cuasiunidimensional en conductos con magnitudes de remanso constantes . . . . .	485
B.4.3.3 Movimientos con superficies de discontinuidad. Ondas de choque normales . . . . .	485
B.5 Flujos turbulentos . . . . .	486
B.5.1 Ecuación de conservación de la energía mecánica en flujos estacionarios en tuberías . . . . .	486
B.5.2 Ecuación de conservación de la energía mecánica en flujos no estacionarios en tuberías de sección constante . . . . .	487
B.6 Máquinas de fluidos . . . . .	487
B.6.1 Ecuación de conservación de la energía . . . . .	487
B.6.2 Definición de alturas y rendimientos . . . . .	488
B.6.2.1 Bombas hidráulicas . . . . .	488
B.6.2.2 Turbinas hidráulicas . . . . .	490
B.6.3 Pérdidas de energía en la instalación . . . . .	492
<b>C Propiedades físicas, tablas y diagramas</b>	<b>493</b>
<b>Índice alfabético</b>	<b>501</b>

## Capítulo 2

# Estática de fluidos

---

### Problema 2.1. Atmósfera isoterma

Determinar la variación con la altura de la presión y la densidad en una atmósfera isoterma a temperatura  $T = 288 \text{ K}$ , suponiendo que la presión en la superficie del terreno es  $p_0 = 1,013 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$ .

### Solución

Aplicando la ecuación (B.2.10) (con  $U = gz$ ; eje  $z$  con sentido positivo hacia arriba) y utilizando la ecuación de estado de los gases perfectos, resulta

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -g \frac{p}{RT}. \quad (2.1.1)$$

Integrando desde  $z = 0$  hasta una altura genérica  $z$ ,

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = - \int_0^z \frac{g}{RT} dz,$$

se obtiene

$$p = p_0 \exp \left[ -\frac{gz}{RT} \right],$$

y teniendo en cuenta la ecuación de estado,

$$\rho = \frac{p_0}{RT} \exp \left( -\frac{gz}{RT} \right).$$

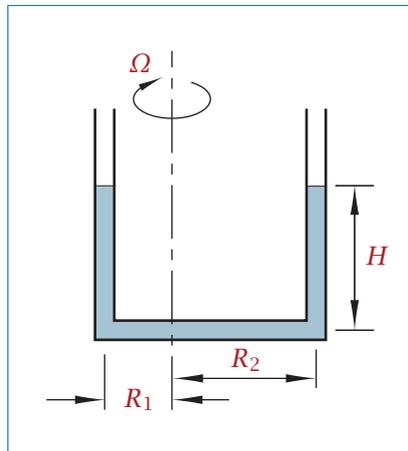
Sustituyendo valores, resulta

$$p = 1,013 \times 10^5 \exp(-1,19 \times 10^{-4} z), \quad \rho = 1,226 \exp(-1,19 \times 10^{-4} z)$$

( $p$  en  $\text{N m}^{-2}$ ,  $\rho$  en  $\text{kg m}^{-3}$  y  $z$  en m).

### Problema 2.2. Rotación de un tubo en U que contiene dos líquidos inmiscibles

El tubo en U de la figura, abierto en los dos extremos, se encuentra inicialmente en reposo y lleno de agua hasta una altura  $H = 12$  cm (situación representada en la figura).



A continuación se añade a una de las ramas (la que aparece a la derecha en la figura) una columna de aceite de densidad  $\rho_{ac} = 800 \text{ kg m}^{-3}$ , de altura  $\Delta z = 5$  cm. Se despreciarán los efectos de tensión superficial y se supondrá que el radio del tubo es pequeño frente a las restantes longitudes indicadas.

- a) Determinar la altura que alcanzará la superficie libre del líquido en cada una de las ramas.

A continuación se hace girar el tubo a una velocidad  $\Omega = 5 \text{ rad s}^{-1}$  alrededor del eje indicado en la figura ( $R_1 = 6$  cm,  $R_2 = 12$  cm).

b) Calcular el nuevo nivel que alcanzará el líquido en cada rama.

Explicar qué ocurriría si se aumentase progresivamente el valor de  $\Omega$  a partir de la situación descrita en el apartado b).

### Solución

a) Sean  $z_1$  y  $z_2$  las alturas que alcanza el agua en las ramas de la izquierda y de la derecha, respectivamente, una vez añadido el aceite. La conservación del volumen de agua requiere que se cumpla

$$z_1 + z_2 = 2H. \quad (2.2.1)$$

Integrando la ecuación (B.2.10) de la estática en el agua,

$$\frac{dp}{dU} = -\rho_{ag}, \quad (2.2.2)$$

entre la superficie libre del agua en la rama de la izquierda (1) y la superficie de separación agua-aceite (2), teniendo en cuenta que  $U = gz$ , se obtiene

$$p_2 - p_{at} = \rho_{ag}g(z_1 - z_2). \quad (2.2.3)$$

Integrando la ecuación de la estática en el aceite entre la superficie libre del aceite en la rama de la derecha y la superficie de separación agua-aceite, se obtiene

$$p_2 - p_{at} = \rho_{ac}g\Delta z. \quad (2.2.4)$$

De las ecuaciones (2.2.3) y (2.2.4) resulta

$$z_1 - z_2 = \frac{\rho_{ac}}{\rho_{ag}} \Delta z,$$

y, teniendo en cuenta la ecuación (2.2.1), se obtiene finalmente

$$z_1 = 0,14 \text{ m},$$

$$z_2 = 0,10 \text{ m}.$$

b) El potencial de fuerzas másicas es en este caso

$$U = gz - \frac{\Omega^2 r^2}{2}.$$



- a) Calcular la resultante de las fuerzas de superficie que ejerce el agua sobre la compuerta y el momento de dichas fuerzas respecto del eje A.
- b) Calcular el punto de aplicación de la fuerza resultante sobre cada una de las caras de la compuerta.

## Solución

a) La condición de equilibrio estático en el fluido es

$$dp/dh = \rho g, \quad (2.3.1)$$

siendo  $h$  la profundidad desde la superficie libre del agua.<sup>1</sup> Al ser el fluido de densidad constante, integrando se obtiene la distribución de presión

$$p = p_{\text{at}} + \rho gh,$$

donde  $p_{\text{at}}$  es la presión atmosférica. La fuerza que se ejerce sobre la superficie de la compuerta en contacto con el agua es

$$\mathbf{F}_1 = \int_{ABCD} -p\mathbf{n}_1 dS = \int_{ABCD} -(p_{\text{at}} + \rho gh)\mathbf{n}_1 dS,$$

siendo  $\mathbf{n}_1$  el vector unitario normal a la superficie de la compuerta, con sentido positivo desde la compuerta hacia el agua. Sobre la superficie exterior de la compuerta, en contacto con el aire, actúa la presión atmosférica, por lo que la fuerza que se ejerce sobre ella es

$$\mathbf{F}_2 = \int_{ABCD} -p_{\text{at}}\mathbf{n}_2 dS,$$

siendo  $\mathbf{n}_2$  el vector unitario normal a la superficie de la compuerta, con sentido positivo desde la compuerta hacia el aire. Dado que  $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$  en cada elemento de superficie de la compuerta, se obtiene que la fuerza total que se ejerce sobre la compuerta es

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \int_{ABCD} -\rho gh\mathbf{n}_1 dS. \quad (2.3.2)$$

---

<sup>1</sup> En numerosos problemas se utilizará la profundidad,  $h$ , con sentido opuesto al de la coordenada  $z$ . Obsérvese el signo diferente en las ecuaciones (2.1.1) y (2.3.1).

Puede observarse que se obtiene esta misma expresión si solo se considera la fuerza que se ejerce sobre la superficie de la compuerta en contacto con el agua (sin tener en cuenta la que se ejerce sobre la superficie en contacto con el aire), siempre que se utilicen en el cálculo presiones manométricas en lugar de presiones absolutas (haciendo, por tanto,  $p_{\text{at}} = 0$ ). En tal caso,  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1$  (ya que  $\mathbf{F}_2 = 0$ ). Esto es lo que habitualmente se hará en otros problemas de este tipo, en los que aparecen líquidos en contacto con sólidos sometidos exteriormente a una presión atmosférica uniforme; es decir, se determinará la fuerza que se ejerce sobre la superficie del sólido en contacto con líquidos empleando en el cálculo presiones manométricas. Aunque, en este caso, para obtener la ecuación (2.3.2) se ha tenido en cuenta que  $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$  al tratarse de una compuerta delgada, este resultado puede generalizarse a cuerpos de forma arbitraria teniendo en cuenta que la resultante de las fuerzas de presión (por ejemplo, las debidas a la presión atmosférica) que actúan uniformemente sobre una superficie cerrada es nula.

Se tomará un sistema de coordenadas con el eje  $x$  coincidente con el eje A (sentido saliente del papel positivo), el eje  $y$  en el plano de la figura, con dirección horizontal y sentido positivo hacia la derecha, y el eje  $z$  en dirección vertical y sentido positivo hacia arriba. Se va a descomponer la integral de la ecuación (2.3.2) en las contribuciones debidas a las tres superficies planas de la compuerta:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{AB} &= - \int_{0,5}^{1,5} \rho g h \mathbf{j} b \, dh = -19\,600 \mathbf{j} \quad (\mathbf{n}_1 = \mathbf{j}), \\ \mathbf{F}_{BC} &= - \int_{-2}^0 \rho g (1,5) (-\mathbf{k}) b \, dy = 58\,800 \mathbf{k} \quad (\mathbf{n}_1 = -\mathbf{k}), \\ \mathbf{F}_{CD} &= - \int_0^{1,5} \rho g h (-\mathbf{j}) b \, dh = 22\,050 \mathbf{j} \quad (\mathbf{n}_1 = -\mathbf{j}), \end{aligned}$$

siendo  $b$  la anchura de la compuerta (valores de las fuerzas expresados en N). La fuerza resultante (expresada en N) es

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{BC} + \mathbf{F}_{CD} = 2450 \mathbf{j} + 58\,800 \mathbf{k}.$$

Análogamente pueden obtenerse los momentos respecto del eje A de las fuerzas de superficie que se ejercen sobre cada una de las superficies planas (la única componente es según el eje  $x$ ):<sup>2</sup>

$$\mathbf{M}_{AB} = \int_{0,5}^{1,5} \rho g h (h - 0,5) (-\mathbf{i}) b \, dh = -11\,433 \mathbf{i},$$

<sup>2</sup> En cualquier problema, en las ecuaciones en las que aparezcan valores numéricos de magnitudes dimensionales, sin indicación de las unidades en las que están expresados, se entenderá que estas serán las correspondientes del Sistema Internacional.

$$M_{BC} = \int_{-2}^0 \rho g(1,5) y i b dy = -58\,800 \mathbf{i},$$

$$M_{CD} = \int_0^{1,5} \rho g h(h - 0,5) i b dh = 11\,025 \mathbf{i}$$

(valores expresados en N m).

El momento total (expresado en N m) es

$$M = M_{AB} + M_{BC} + M_{CD} = -59\,208 \mathbf{i}.$$

(sentido entrante al papel).

b) Las coordenadas que definen los puntos de corte de las líneas de acción de las fuerzas con las correspondientes superficies planas son las siguientes (la coordenada  $x$  es siempre la del plano medio de la compuerta, al ser el problema bidimensional):

$$z_{AB} = -\frac{M_{AB}}{F_{AB}} = -0,5833 \text{ m},$$

$$y_{BC} = -\frac{M_{BC}}{F_{BC}} = -1 \text{ m},$$

$$z_{CD} = -\frac{M_{CD}}{F_{CD}} = -0,5 \text{ m}$$

( $M_{AB}$ ,  $F_{AB}$ , ..., denotan los módulos de los vectores correspondientes).

Es obvio que se podía anticipar el resultado  $y_{BC} = -1$  m, y también, si se han resuelto anteriormente otros problemas de este tipo, que la línea de acción de la fuerza sobre la cara CD debe estar a una distancia de  $\frac{1}{3}\overline{CD}$  desde el punto C. También podría haberse calculado  $F_{BC}$  teniendo en cuenta que su módulo ha de ser igual al peso del líquido que existirá por encima de la cara BC hasta la superficie libre. Asimismo podría haberse utilizado el concepto de prisma de presiones, empleado fórmulas de momentos de inercia, etc. Aunque obviamente puede elegirse el procedimiento de resolución que se considere más conveniente, la experiencia demuestra que suelen cometerse menos errores si se utiliza un planteamiento de tipo más general y sistemático, como el empleado en este problema.

### Problema 2.4. Distribución de presión en un líquido en reposo de densidad no uniforme

La densidad de un líquido contenido en un depósito varía linealmente con la profundidad, siendo de  $1 \text{ g cm}^{-3}$  en la superficie libre y de  $1,2 \text{ g cm}^{-3}$  a una profundidad de 4 m. El gas situado sobre la superficie libre del líquido está a una presión absoluta de  $1,2 \text{ kgf cm}^{-2}$ . Determinar la presión a una profundidad de 2 m.

### Solución

La ley de variación de la densidad en el depósito viene dada por

$$\rho = 1000 + 50h \quad (\rho \text{ en kg m}^{-3}, h \text{ (profundidad) en m}). \quad (2.4.1)$$

Integrando la ecuación (B.2.10) de la estática ( $U = gz$ ;  $z$  es la coordenada vertical;  $dz = -dh$ ),<sup>3</sup>

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \Rightarrow \frac{dp}{dh} = \rho g,$$

una vez introducida la ecuación (2.4.1),

$$p(h = 2) = p(h = 0) + g \int_0^2 (1000 + 50h) dh,$$

se obtiene<sup>4</sup>

$$p(h = 2) = 138\,180 \text{ N m}^{-2}.$$

### Problema 2.5. Compuerta vertical que separa dos líquidos, uno de ellos de densidad no uniforme

En la figura se representa una sección de un tanque de base cuadrada, de 3 m de lado, abierto a la atmósfera y dividido mediante una compuerta vertical en dos depósitos de iguales dimensiones. La compuerta puede girar sin ro-

<sup>3</sup> Véase la nota 1 al pie de la página 37.

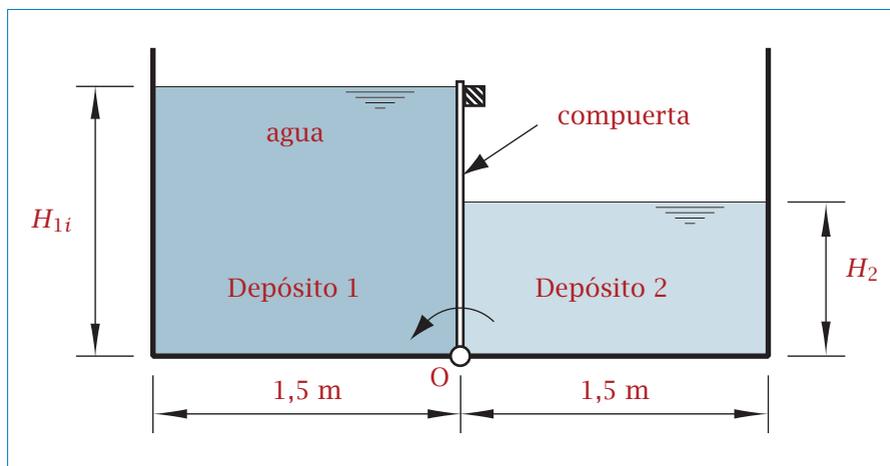
<sup>4</sup> Véase la nota 2 al pie de la página 38.

zamiento alrededor del eje O, en el sentido indicado en la figura. El depósito de la izquierda (1) contiene inicialmente agua hasta una altura  $H_{1i} = 2,5$  m, y el de la derecha (2) un líquido de densidad no uniforme,  $\rho_2$ , hasta una altura  $H_2 = 1,5$  m. La variación de  $\rho_2$  con la profundidad  $h$  puede aproximarse de la forma siguiente:

$$\rho_2 = \rho_0 = 800 \text{ kg m}^{-3}, \quad 0 \leq h \leq 0,5,$$

$$\rho_2 = \rho_0 (0,75 + h/2), \quad 0,5 < h \leq 1,5 \quad (\rho \text{ en kg m}^{-3}, h \text{ en m}).$$

- Determinar la ley de variación de la presión con la profundidad  $h$  en el líquido contenido en el depósito 2.
- Calcular la magnitud y el punto de aplicación de la fuerza ejercida sobre la compuerta por el líquido del depósito 2.



En un instante dado se abre a la atmósfera un orificio de área  $A = 2 \text{ cm}^2$  situado en el fondo del depósito 1.

- Determinar la altura  $H_1$  de la superficie libre del agua en el depósito 1 en el instante en que la compuerta comienza a girar. Se supondrá que la velocidad del agua en el depósito 1 es suficientemente pequeña, de forma que puede aplicarse la ecuación de la estática.

## Solución

- Integrando la ecuación (B.2.10) de la estática (con  $U = gz$ , y tomando  $h$  en

sentido opuesto a la coordenada vertical  $z$ ,  $dh = -dz$ ),

$$\frac{dp}{dh} = \rho_2 g,$$

se obtiene, para  $0 \leq h \leq 0,5$ ,

$$p = \rho_0 g h = 7848 h, \quad (2.5.1)$$

y, para  $0,5 < h \leq 1,5$ ,

$$p = \int_0^{0,5} \rho_0 g dh + \int_{0,5}^h \rho_0 g \left(0,75 + \frac{1}{2}h\right) dh,$$

de donde resulta finalmente

$$p = 490,5 + 5886 h + 1962 h^2 \quad (2.5.2)$$

( $p$  es presión manométrica, en  $\text{N m}^{-2}$ ;  $h$  en m; se ha tomado  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ ).

b) La fuerza sobre la compuerta debida al líquido del depósito 2 (horizontal y con sentido hacia la izquierda, evidentemente) es

$$F = \int_{S_c} p dS = \int_0^{1,5} p b dh,$$

siendo  $b$  la anchura de la compuerta y  $S_c$  su superficie en contacto con el líquido. Sustituyendo la distribución de presión obtenida en el apartado anterior,

$$F = b \int_0^{0,5} 7848 h dh + b \int_{0,5}^{1,5} (490,5 + 5886 h + 1962 h^2) dh,$$

e integrando, resulta

$$F = 28449 \text{ N.}$$

El momento de la distribución de fuerzas debidas a la presión (respecto del eje que coincide con la línea de contacto entre la superficie libre del agua y la compuerta, por ejemplo), debe ser igual al momento de la fuerza resultante sobre la compuerta:

$$\int_{S_c} p h dS = \int_0^{1,5} p b h dh = F h_m, \quad (2.5.3)$$

siendo  $h_m$  la profundidad del punto de aplicación de la fuerza resultante. De la ecuación (2.5.3), sustituyendo en ella las ecuaciones (2.5.1) y (2.5.2), se obtiene

$$h_m = \frac{b}{F} \left[ \int_0^{0,5} 7848 h^2 dh + \int_{0,5}^{1,5} (490,5 h + 5886 h^2 + 1962 h^3) dh \right],$$

de donde resulta

$$h_m = 1,018 \text{ m.}$$

c) Es fácil deducir que la fuerza que ejerce sobre la compuerta el agua contenida en el depósito 1 es

$$F_1 = b\rho_1g \frac{1}{2}H_1^2,$$

estando situada su línea de acción a una altura  $H_1/3$  respecto del fondo del depósito. En el instante en que la compuerta empieza a girar, se igualan los momentos respecto del eje O de las fuerzas que se ejercen sobre ambas caras de la compuerta:

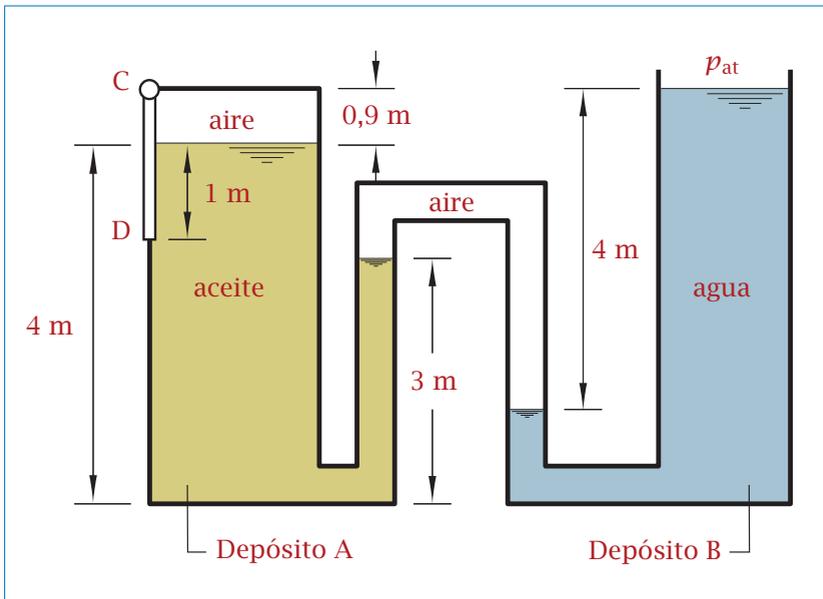
$$F(H_2 - h_m) = b\rho_1g \frac{1}{2}H_1^2 \frac{1}{3}H_1,$$

de donde se obtiene

$$H_1 = 1,409 \text{ m.}$$

**Problema 2.6.** Equilibrio entre aire, agua y aceite en dos depósitos conectados por una tubería

En el sistema de la figura, la densidad del aceite contenido en el depósito A es uniforme e igual a  $900 \text{ kg m}^{-3}$  y el depósito B está abierto a la atmósfera.



Calcular:

- Las presiones del aire en el depósito A y en la tubería que conecta ambos depósitos.
- La magnitud (por unidad de anchura) y el punto de aplicación de la fuerza que se ejerce sobre la compuerta CD indicada en la figura.

### Solución

a) Integrando la ecuación (B.2.10) de la estática en el agua (con  $U = gz$ ), entre las superficies libres en el depósito B y en la tubería (entre las que existe una diferencia de cotas  $\Delta z_B = 4$  m), resulta

$$\rho_{ag}g\Delta z_B = p_T,$$

de donde se obtiene la presión manométrica del aire en la tubería,

$$p_T = (1000)(9,81)(4) = 39\,240 \text{ N m}^{-2}.$$

Análogamente, integrando la ecuación de la estática en el aceite, entre las superficies libres en el depósito A y en la tubería (entre las que existe una diferencia de cotas  $\Delta z_A = 1$  m), resulta

$$p_A + \rho_{ac}g\Delta z_A = p_T,$$

de donde se obtiene la presión manométrica del aire en el depósito A,

$$p_A = 39\,240 - (900)(9,81)(1) = 30\,411 \text{ N m}^{-2}.$$

b) Se supondrá que el problema es bidimensional. La fuerza por unidad de anchura sobre la compuerta (horizontal y con sentido hacia la izquierda, evidentemente) es

$$F = \int_{-0,9}^1 p \, dh, \quad (2.6.1)$$

siendo  $h$  la profundidad desde la superficie libre del aceite en el depósito A. Se utilizarán presiones manométricas para tener en cuenta la fuerza debida a la presión atmosférica que actúa en la superficie exterior de la compuerta. La presión es  $p = p_A$  para  $h \leq 0$  y  $p = p_A + \rho_{ac}gh$  para  $h > 0$ , con lo que, de la ecuación (2.6.1),

$$F = \int_{-0,9}^0 p_A \, dh + \int_0^1 (p_A + \rho_{ac}gh) \, dh = (30\,411)(1,9) + (900)(9,81) \frac{(1)^2}{2},$$