Índice general

Apéndices

Capítulo 2

Estática de fluidos

Problema 2.1. Atmósfera isoterma

Determinar la variación con la altura de la presión y la densidad en una atmósfera isoterma a temperatura $T = 288$ K, suponiendo que la presión en la superficie del terreno es $p_0 = 1{,}013 \times 10^5\ \mathrm{N\,m^{-2}}$.

Solución

Aplicando la ecuación (B.2.10) (con $U = gz$; eje z con sentido positivo hacia arriba) y utilizando la ecuación de estado de los gases perfectos, resulta

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho g = -g\,\frac{p}{RT}. \tag{2.1.1}$$

Integrando desde $z = 0$ hasta una altura genérica z,

$$\int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\int_0^z \frac{g}{RT}\,\mathrm{d}z,$$

se obtiene

$$p = p_0 \exp\left[-\frac{gz}{RT}\right],$$

y teniendo en cuenta la ecuación de estado,

$$\rho = \frac{p_0}{RT} \exp\left(-\frac{gz}{RT}\right).$$

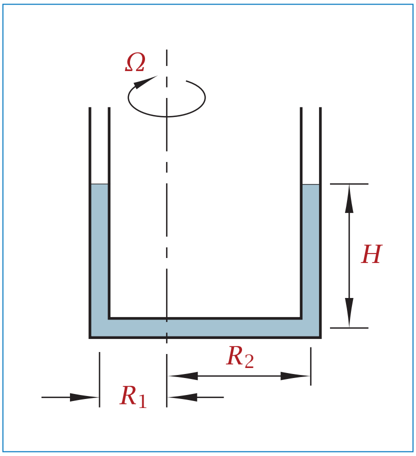
Sustituyendo valores, resulta

$$\boxed{p = 1{,}013 \times 10^5 \exp(-1{,}19 \times 10^{-4} z), \quad \rho = 1{,}226 \exp(-1{,}19 \times 10^{-4} z)}$$

(p en N m^{-2}, ρ en kg m^{-3} y z en m).

Problema 2.2. Rotación de un tubo en U que contiene dos líquidos inmiscibles

El tubo en U de la figura, abierto en los dos extremos, se encuentra inicialmente en reposo y lleno de agua hasta una altura $H = 12$ cm (situación representada en la figura).



A continuación se añade a una de las ramas (la que aparece a la derecha en la figura) una columna de aceite de densidad $\rho_{ac} = 800$ kg m^{-3}, de altura $\Delta z = 5$ cm. Se despreciarán los efectos de tensión superficial y se supondrá que el radio del tubo es pequeño frente a las restantes longitudes indicadas.

a) Determinar la altura que alcanzará la superficie libre del líquido en cada una de las ramas.

A continuación se hace girar el tubo a una velocidad $\Omega = 5$ rad s^{-1} alrededor del eje indicado en la figura ($R_1 = 6$ cm, $R_2 = 12$ cm).

b) Calcular el nuevo nivel que alcanzará el líquido en cada rama.

Explicar qué ocurriría si se aumentase progresivamente el valor de Ω a partir de la situación descrita en el apartado b).

Solución

a) Sean z_1 y z_2 las alturas que alcanza el agua en las ramas de la izquierda y de la derecha, respectivamente, una vez añadido el aceite. La conservación del volumen de agua requiere que se cumpla

$$z_1 + z_2 = 2H. \tag{2.2.1}$$

Integrando la ecuación (B.2.10) de la estática en el agua,

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}U} = -\rho_{\mathrm{ag}}, \tag{2.2.2}$$

entre la superficie libre del agua en la rama de la izquierda (1) y la superficie de separación agua-aceite (2), teniendo en cuenta que $U = gz$, se obtiene

$$p_2 - p_{\mathrm{at}} = \rho_{\mathrm{ag}} g (z_1 - z_2). \tag{2.2.3}$$

Integrando la ecuación de la estática en el aceite entre la superficie libre del aceite en la rama de la derecha y la superficie de separación agua-aceite, se obtiene

$$p_2 - p_{\mathrm{at}} = \rho_{\mathrm{ac}} g \Delta z. \tag{2.2.4}$$

De las ecuaciones (2.2.3) y (2.2.4) resulta

$$z_1 - z_2 = \frac{\rho_{\mathrm{ac}}}{\rho_{\mathrm{ag}}} \Delta z,$$

y, teniendo en cuenta la ecuación (2.2.1), se obtiene finalmente

$$\boxed{z_1 = 0{,}14 \text{ m},}$$

$$\boxed{z_2 = 0{,}10 \text{ m}.}$$

b) El potencial de fuerzas másicas es en este caso

$$U = gz - \frac{\Omega^2 r^2}{2}.$$

Integrando de nuevo la ecuación (2.2.2) entre la superficie libre del agua en la rama de la izquierda y la superficie de separación agua-aceite, se obtiene ahora

$$p_2 - p_{\mathrm{at}} = \rho_{\mathrm{ag}} g (z_1 - z_2) - \rho_{\mathrm{ag}} \frac{\Omega^2}{2} (R_1^2 - R_2^2). \qquad (2.2.5)$$

Integrando la ecuación de la estática en el aceite entre la superficie libre del aceite en la rama de la derecha y la superficie de separación agua-aceite, se obtiene de nuevo la ecuación (2.2.4). De las ecuaciones (2.2.4) y (2.2.5) resulta

$$z_1 - z_2 = \frac{\rho_{\mathrm{ac}}}{\rho_{\mathrm{ag}}} \Delta z + \frac{\Omega^2}{2g} (R_1^2 - R_2^2),$$

y teniendo en cuenta la ecuación (2.2.1), se obtiene finalmente

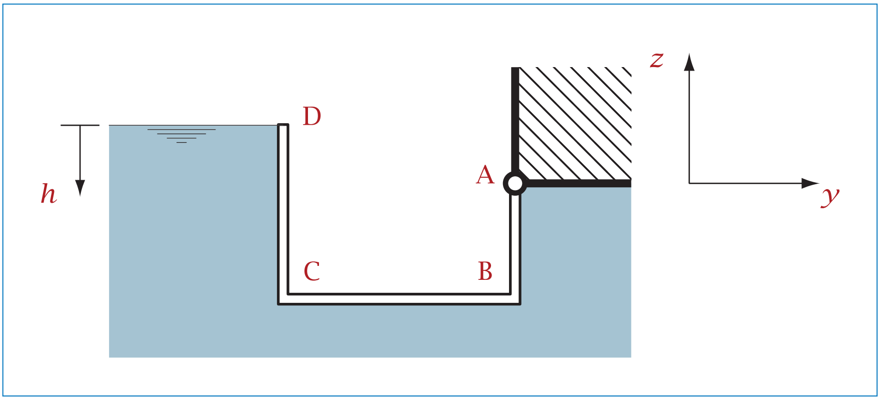
$$\boxed{z_1 = 0{,}133 \text{ m},}$$

$$\boxed{z_2 = 0{,}107 \text{ m}.}$$

Explíquese qué ocurriría si, a partir de esta situación de equilibrio, se aumentara progresivamente el valor de Ω.

Problema 2.3. Fuerza sobre una compuerta giratoria

La anchura de la compuerta ABCD de la figura es de 2 m, y las restantes dimensiones son $\overline{\mathrm{AB}} = 1$ m, $\overline{\mathrm{BC}} = 2$ m y $\overline{\mathrm{CD}} = 1{,}5$ m. La superficie libre del agua alcanza el nivel indicado en la figura.



a) Calcular la resultante de las fuerzas de superficie que ejerce el agua sobre la compuerta y el momento de dichas fuerzas respecto del eje A.

b) Calcular el punto de aplicación de la fuerza resultante sobre cada una de las caras de la compuerta.

Solución

a) La condición de equilibrio estático en el fluido es

$$\mathrm{d}p/\,\mathrm{d}h = \rho g, \tag{2.3.1}$$

siendo h la profundidad desde la superficie libre del agua.[1] Al ser el fluido de densidad constante, integrando se obtiene la distribución de presión

$$p = p_{\mathrm{at}} + \rho g h,$$

donde p_{at} es la presión atmosférica. La fuerza que se ejerce sobre la superficie de la compuerta en contacto con el agua es

$$\boldsymbol{F}_1 = \int_{ABCD} -p\boldsymbol{n}_1 \,\mathrm{d}S = \int_{ABCD} -(p_{\mathrm{at}} + \rho g h)\boldsymbol{n}_1 \,\mathrm{d}S,$$

siendo $\boldsymbol{n}_1$ el vector unitario normal a la superficie de la compuerta, con sentido positivo desde la compuerta hacia el agua. Sobre la superficie exterior de la compuerta, en contacto con el aire, actúa la presión atmosférica, por lo que la fuerza que se ejerce sobre ella es

$$\boldsymbol{F}_2 = \int_{ABCD} -p_{\mathrm{at}}\boldsymbol{n}_2 \,\mathrm{d}S,$$

siendo $\boldsymbol{n}_2$ el vector unitario normal a la superficie de la compuerta, con sentido positivo desde la compuerta hacia el aire. Dado que $\boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{n}_2$ en cada elemento de superficie de la compuerta, se obtiene que la fuerza total que se ejerce sobre la compuerta es

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = \int_{ABCD} -\rho g h \boldsymbol{n}_1 \,\mathrm{d}S. \tag{2.3.2}$$

[1] En numerosos problemas se utilizará la profundidad, h, con sentido opuesto al de la coordenada z. Obsérvese el signo diferente en las ecuaciones (2.1.1) y (2.3.1).

Puede observarse que se obtiene esta misma expresión si solo se considera la fuerza que se ejerce sobre la superficie de la compuerta en contacto con el agua (sin tener en cuenta la que se ejerce sobre la superficie en contacto con el aire), siempre que se utilicen en el cálculo presiones manométricas en lugar de presiones absolutas (haciendo, por tanto, $p_{\mathrm{at}} = 0$). En tal caso, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1$ (ya que $\boldsymbol{F}_2 = 0$). Esto es lo que habitualmente se hará en otros problemas de este tipo, en los que aparecen líquidos en contacto con sólidos sometidos exteriormente a una presión atmosférica uniforme; es decir, se determinará la fuerza que se ejerce sobre la superficie del sólido en contacto con líquidos empleando en el cálculo presiones manométricas. Aunque, en este caso, para obtener la ecuación (2.3.2) se ha tenido en cuenta que $\boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{n}_2$ al tratarse de una compuerta delgada, este resultado puede generalizarse a cuerpos de forma arbitraria teniendo en cuenta que la resultante de las fuerzas de presión (por ejemplo, las debidas a la presión atmosférica) que actúan uniformemente sobre una superficie cerrada es nula.

Se tomará un sistema de coordenadas con el eje x coincidente con el eje A (sentido saliente del papel positivo), el eje y en el plano de la figura, con dirección horizontal y sentido positivo hacia la derecha, y el eje z en dirección vertical y sentido positivo hacia arriba. Se va a descomponer la integral de la ecuación (2.3.2) en las contribuciones debidas a las tres superficies planas de la compuerta:

$$\boldsymbol{F}_{AB} = -\int_{0,5}^{1,5} \rho g h \boldsymbol{j} b \,\mathrm{d}h = -19\,600\,\boldsymbol{j} \qquad (\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{j}),$$

$$\boldsymbol{F}_{BC} = -\int_{-2}^{0} \rho g (1,5)(-\boldsymbol{k}) b \,\mathrm{d}y = 58\,800\,\boldsymbol{k} \qquad (\boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{k}),$$

$$\boldsymbol{F}_{CD} = -\int_{0}^{1,5} \rho g h(-\boldsymbol{j}) b \,\mathrm{d}h = 22\,050\,\boldsymbol{j} \qquad (\boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{j}),$$

siendo b la anchura de la compuerta (valores de las fuerzas expresados en N). La fuerza resultante (expresada en N) es

$$\boxed{\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{AB} + \boldsymbol{F}_{BC} + \boldsymbol{F}_{CD} = 2450\,\boldsymbol{j} + 58\,800\,\boldsymbol{k}.}$$

Análogamente pueden obtenerse los momentos respecto del eje A de las fuerzas de superficie que se ejercen sobre cada una de las superficies planas (la única componente es según el eje x):[2]

$$\boldsymbol{M}_{AB} = \int_{0,5}^{1,5} \rho g h (h - 0,5)(-\boldsymbol{i}) b \,\mathrm{d}h = -11\,433\,\boldsymbol{i},$$

[2] En cualquier problema, en las ecuaciones en las que aparezcan valores numéricos de magnitudes dimensionales, sin indicación de las unidades en las que están expresados, se entenderá que estas serán las correspondientes del Sistema Internacional.

$$\boldsymbol{M}_{BC} = \int_{-2}^{0} \rho g (1{,}5) y \boldsymbol{i} b \, \mathrm{d}y = -58\,800 \; \boldsymbol{i},$$

$$\boldsymbol{M}_{CD} = \int_{0}^{1{,}5} \rho g h (h - 0{,}5) \boldsymbol{i} b \, \mathrm{d}h = 11\,025 \; \boldsymbol{i}$$

(valores expresados en N m).

El momento total (expresado en N m) es

$$\boxed{\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_{AB} + \boldsymbol{M}_{BC} + \boldsymbol{M}_{CD} = -59\,208 \; \boldsymbol{i}.}$$

(sentido entrante al papel).

b) Las coordenadas que definen los puntos de corte de las líneas de acción de las fuerzas con las correspondientes superficies planas son las siguientes (la coordenada x es siempre la del plano medio de la compuerta, al ser el problema bidimensional):

$$\boxed{z_{AB} = -\frac{M_{AB}}{F_{AB}} = -0{,}5833 \text{ m},}$$

$$\boxed{y_{BC} = -\frac{M_{BC}}{F_{BC}} = -1 \text{ m},}$$

$$\boxed{z_{CD} = -\frac{M_{CD}}{F_{CD}} = -0{,}5 \text{ m}}$$

(M_{AB}, F_{AB}, ..., denotan los módulos de los vectores correspondientes).

Es obvio que se podía anticipar el resultado $y_{BC} = -1$ m, y también, si se han resuelto anteriormente otros problemas de este tipo, que la línea de acción de la fuerza sobre la cara CD debe estar a una distancia de $\frac{1}{3}\overline{CD}$ desde el punto C. También podría haberse calculado $\boldsymbol{F}_{BC}$ teniendo en cuenta que su módulo ha de ser igual al peso del líquido que existiría por encima de la cara BC hasta la superficie libre. Asimismo podría haberse utilizado el concepto de prisma de presiones, empleado fórmulas de momentos de inercia, etc. Aunque obviamente puede elegirse el procedimiento de resolución que se considere más conveniente, la experiencia demuestra que suelen cometerse menos errores si se utiliza un planteamiento de tipo más general y sistemático, como el empleado en este problema.

Problema 2.4. Distribución de presión en un líquido en reposo de densidad no uniforme

La densidad de un líquido contenido en un depósito varía linealmente con la profundidad, siendo de 1 $\mathrm{g\,cm^{-3}}$ en la superficie libre y de 1,2 $\mathrm{g\,cm^{-3}}$ a una profundidad de 4 m. El gas situado sobre la superficie libre del líquido está a una presión absoluta de 1,2 $\mathrm{kgf\,cm^{-2}}$. Determinar la presión a una profundidad de 2 m.

Solución

La ley de variación de la densidad en el depósito viene dada por

$$\rho = 1000 + 50h \quad (\rho \text{ en } \mathrm{kg\,m^{-3}},\ h \text{ (profundidad) en m}). \tag{2.4.1}$$

Integrando la ecuación (B.2.10) de la estática ($U = gz$; z es la coordenada vertical; $\mathrm{d}z = -\mathrm{d}h$),[3]

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho g \Rightarrow \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}h} = \rho g,$$

una vez introducida la ecuación (2.4.1),

$$p(h=2) = p(h=0) + g\int_0^2 (1000 + 50h)\,\mathrm{d}h,$$

se obtiene[4]

$$\boxed{p(h=2) = 138\,180\ \mathrm{N\,m^{-2}}.}$$

Problema 2.5. Compuerta vertical que separa dos líquidos, uno de ellos de densidad no uniforme

En la figura se representa una sección de un tanque de base cuadrada, de 3 m de lado, abierto a la atmósfera y dividido mediante una compuerta vertical en dos depósitos de iguales dimensiones. La compuerta puede girar sin ro-

[3] Véase la nota 1 al pie de la página 37.
[4] Véase la nota 2 al pie de la página 38.

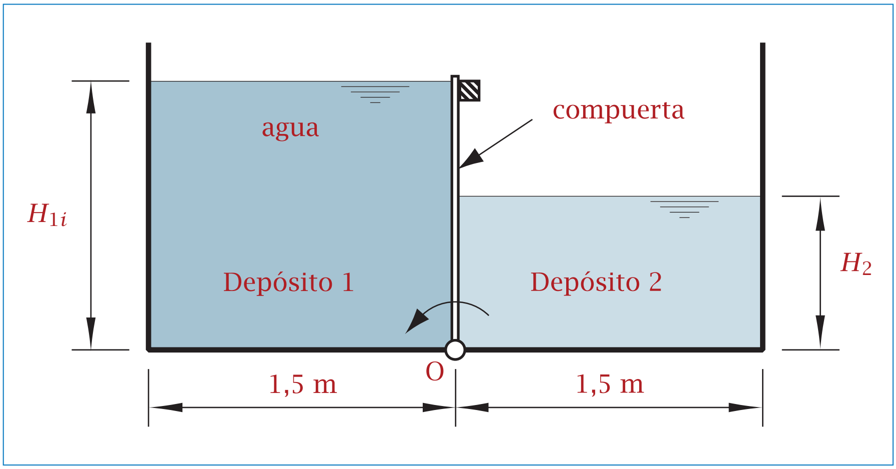
zamiento alrededor del eje O, en el sentido indicado en la figura. El depósito de la izquierda (1) contiene inicialmente agua hasta una altura $H_{1i} = 2{,}5$ m, y el de la derecha (2) un líquido de densidad no uniforme, ρ_2, hasta una altura $H_2 = 1{,}5$ m. La variación de ρ_2 con la profundidad h puede aproximarse de la forma siguiente:

$$\rho_2 = \rho_0 = 800 \text{ kg m}^{-3}, \quad 0 \le h \le 0{,}5,$$

$$\rho_2 = \rho_0\,(0{,}75 + h/2)\,, \quad 0{,}5 < h \le 1{,}5 \quad (\rho \text{ en kg m}^{-3},\ h \text{ en m}).$$

a) Determinar la ley de variación de la presión con la profundidad h en el líquido contenido en el depósito 2.

b) Calcular la magnitud y el punto de aplicación de la fuerza ejercida sobre la compuerta por el líquido del depósito 2.



En un instante dado se abre a la atmósfera un orificio de área $A = 2$ cm^2 situado en el fondo del depósito 1.

c) Determinar la altura H_1 de la superficie libre del agua en el depósito 1 en el instante en que la compuerta comienza a girar. Se supondrá que la velocidad del agua en el depósito 1 es suficientemente pequeña, de forma que puede aplicarse la ecuación de la estática.

Solución

a) Integrando la ecuación (B.2.10) de la estática (con $U = gz$, y tomando h en sentido opuesto a la coordenada vertical z, $\mathrm{d}h = -\mathrm{d}z$),

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}h} = \rho_2 g,$$

se obtiene, para $\boxed{0 \le h \le 0{,}5,}$

$$\boxed{p = \rho_0 g h = 7848\,h,} \qquad (2.5.1)$$

y, para $\boxed{0{,}5 < h \le 1{,}5,}$

$$p = \int_0^{0,5} \rho_0 g\,\mathrm{d}h + \int_{0,5}^{h} \rho_0 g \left(0{,}75 + \tfrac{1}{2}h\right)\,\mathrm{d}h,$$

de donde resulta finalmente

$$\boxed{p = 490{,}5 + 5886\,h + 1962\,h^2} \qquad (2.5.2)$$

(p es presión manométrica, en $\mathrm{N\,m^{-2}}$; h en m; se ha tomado $g = 9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$).

b) La fuerza sobre la compuerta debida al líquido del depósito 2 (horizontal y con sentido hacia la izquierda, evidentemente) es

$$F = \int_{S_c} p\,\mathrm{d}S = \int_0^{1,5} p b\,\mathrm{d}h,$$

siendo b la anchura de la compuerta y S_c su superficie en contacto con el líquido. Sustituyendo la distribución de presión obtenida en el apartado anterior,

$$F = b\int_0^{0,5} 7848\,h\,\mathrm{d}h + b\int_{0,5}^{1,5} (490{,}5 + 5886\,h + 1962\,h^2)\,\mathrm{d}h,$$

e integrando, resulta

$$\boxed{F = 28\,449\ \mathrm{N}.}$$

El momento de la distribución de fuerzas debidas a la presión (respecto del eje que coincide con la línea de contacto entre la superficie libre del agua y la compuerta, por ejemplo), debe ser igual al momento de la fuerza resultante sobre la compuerta:

$$\int_{S_c} p h\,\mathrm{d}S = \int_0^{1,5} p b h\,\mathrm{d}h = F h_m, \qquad (2.5.3)$$

siendo h_m la profundidad del punto de aplicación de la fuerza resultante. De la ecuación (2.5.3), sustituyendo en ella las ecuaciones (2.5.1) y (2.5.2), se obtiene

$$h_m = \frac{b}{F}\left[\int_0^{0,5} 7848\,h^2\mathrm{d}h + \int_{0,5}^{1,5} (490{,}5\,h + 5886\,h^2 + 1962\,h^3)\,\mathrm{d}h\right],$$

de donde resulta

$$\boxed{h_m = 1{,}018\ \mathrm{m}.}$$

c) Es fácil deducir que la fuerza que ejerce sobre la compuerta el agua contenida en el depósito 1 es

$$F_1 = b\rho_1 g\,\tfrac{1}{2}H_1^2,$$

estando situada su línea de acción a una altura $H_1/3$ respecto del fondo del depósito. En el instante en que la compuerta empieza a girar, se igualan los momentos respecto del eje O de las fuerzas que se ejercen sobre ambas caras de la compuerta:

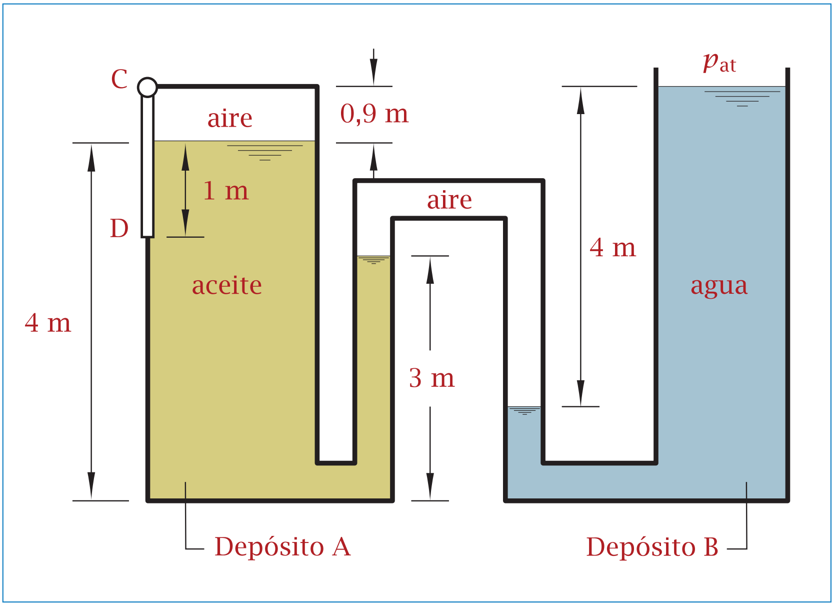
$$F(H_2 - h_m) = b\rho_1 g\,\tfrac{1}{2}H_1^2\,\tfrac{1}{3}H_1,$$

de donde se obtiene

$$\boxed{H_1 = 1{,}409 \text{ m.}}$$

Problema 2.6. Equilibrio entre aire, agua y aceite en dos depósitos conectados por una tubería

En el sistema de la figura, la densidad del aceite contenido en el depósito A es uniforme e igual a 900 kg m^{-3} y el depósito B está abierto a la atmósfera.



Calcular:

a) Las presiones del aire en el depósito A y en la tubería que conecta ambos depósitos.

b) La magnitud (por unidad de anchura) y el punto de aplicación de la fuerza que se ejerce sobre la compuerta CD indicada en la figura.

Solución

a) Integrando la ecuación (B.2.10) de la estática en el agua (con $U = gz$), entre las superficies libres en el depósito B y en la tubería (entre las que existe una diferencia de cotas $\Delta z_B = 4$ m), resulta

$$\rho_{\mathrm{ag}} g \Delta z_B = p_T,$$

de donde se obtiene la presión manométrica del aire en la tubería,

$$\boxed{p_T = (1000)(9{,}81)(4) = 39\,240 \mathrm{~N\,m^{-2}}.}$$

Análogamente, integrando la ecuación de la estática en el aceite, entre las superficies libres en el depósito A y en la tubería (entre las que existe una diferencia de cotas $\Delta z_A = 1$ m), resulta

$$p_A + \rho_{\mathrm{ac}} g \Delta z_A = p_T,$$

de donde se obtiene la presión manométrica del aire en el depósito A,

$$\boxed{p_A = 39\,240 - (900)(9{,}81)(1) = 30\,411 \mathrm{~N\,m^{-2}}.}$$

b) Se supondrá que el problema es bidimensional. La fuerza por unidad de anchura sobre la compuerta (horizontal y con sentido hacia la izquierda, evidentemente) es

$$F = \int_{-0{,}9}^{1} p \,\mathrm{d}h, \tag{2.6.1}$$

siendo h la profundidad desde la superficie libre del aceite en el depósito A. Se utilizarán presiones manométricas para tener en cuenta la fuerza debida a la presión atmosférica que actúa en la superficie exterior de la compuerta. La presión es $p = p_A$ para $h \leq 0$ y $p = p_A + \rho_{\mathrm{ac}} g h$ para $h > 0$, con lo que, de la ecuación (2.6.1),

$$F = \int_{-0{,}9}^{0} p_A \,\mathrm{d}h + \int_{0}^{1} (p_A + \rho_{\mathrm{ac}} g h) \,\mathrm{d}h = (30\,411)(1{,}9) + (900)(9{,}81)\frac{(1)^2}{2},$$