

TEMA III

CONDUCCIÓN DE CALOR EN SUPERFICIES EXTENDIDAS: ALETAS

1. ECUACIÓN GENERAL DE TRANSMISIÓN DE CALOR EN UNA ALETA

1.1. Ecuación general

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{1}{A_c} \cdot \frac{dA_c}{dx} \cdot \frac{d\theta}{dx} - \frac{h_o}{k} \cdot \left(\frac{1}{A_c} \cdot \frac{dA_l}{dx} \right) \cdot \theta + \frac{\dot{q}_v}{k} = 0$$

1.2. Ecuación general de las superficies adicionales cuando no existe generación interna de calor.

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{1}{A_c} \cdot \frac{dA_c}{dx} \cdot \frac{d\theta}{dx} - \frac{h_o}{k} \cdot \left(\frac{1}{A_c} \cdot \frac{dA_l}{dx} \right) \cdot \theta = 0$$

2. ALETAS LONGITUDINALES DE SECCIÓN RECTA CONSTANTE Y AGUJAS DE SECCIÓN RECTA CONSTANTE

<p>a) Para una aleta longitudinal de espesor uniforme:</p> <p>Perímetro:</p> $P = 2 \cdot w + 2 \cdot \delta \approx 2 \cdot w$ <p>Área de la sección recta:</p> $A_c = w \cdot \delta$ <p>Superficie lateral exterior de la aleta:</p> $A_l(x) = P \cdot x$	<p>b) Para una aguja:</p> <p>Perímetro:</p> $P = \pi \cdot D$ <p>Área de la sección recta :</p> $A_c = \frac{\pi \cdot D^2}{4}$ <p>Superficie lateral exterior de la aleta:</p> $A_l(x) = P \cdot x$

2.1. Distribución de temperaturas en la aleta longitudinal / aguja de sección recta constante:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{t - t_{f,o}}{t_0 - t_{f,o}} = \frac{Ch(m \cdot (L - x)) + H \cdot Sh(m \cdot (L - x))}{Ch(m \cdot L) + H \cdot Sh(m \cdot L)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H = \frac{h_o}{k \cdot m} \\ m = \sqrt{\frac{h_o \cdot P}{k \cdot A_c}} \end{array} \right.$$

2.2. Flujo de calor disipado por la aleta longitudinal / aguja de sección recta constante:

$$\dot{Q} = k \cdot m \cdot A_c \cdot \theta_0 \cdot \frac{Sh(m \cdot L) + H \cdot Ch(m \cdot L)}{Ch(m \cdot L) + H \cdot Sh(m \cdot L)}$$

2.2.1. Caso particular 1: flujo de calor despreciable en el extremo

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{t - t_{f,o}}{t_0 - t_{f,o}} = \frac{Ch(m \cdot (L - x))}{Ch(m \cdot L)}$$

$$\dot{Q} = k \cdot m \cdot A_c \cdot \theta_0 \cdot \frac{Sh(m \cdot L)}{Ch(m \cdot L)} = k \cdot m \cdot A_c \cdot \theta_0 \cdot th(m \cdot L)$$

2.2.2. Caso particular 2: aletas longitudinales o agujas muy largas

$$\theta = \theta_0 \cdot e^{-m \cdot x}$$

$$\dot{Q} = \sqrt{h_o \cdot P \cdot k \cdot A_c} \cdot \theta_0$$

2.2.3. Flujo de calor no despreciable en el extremo

Se utiliza la suposición de extremo adiabático, pero con una longitud de aleta corregida:

- Para aguja cilíndrica $L_c = L + \frac{D}{4}$
- Para aleta longitudinal $L_c = L + \frac{\delta}{2}$

2.3. Efectividad de la aleta longitudinal o de la aguja de espesor uniforme

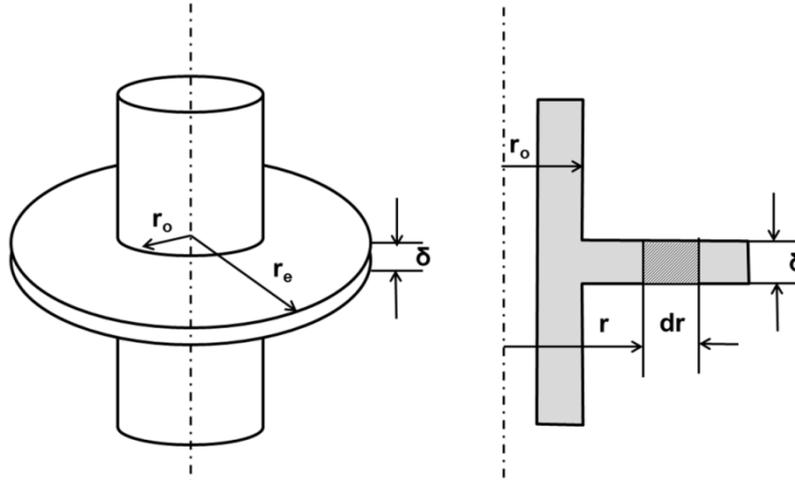
$$\eta_f = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_M} = \frac{k \cdot m \cdot A_c \cdot \theta_0 \cdot th(m \cdot L)}{P \cdot L \cdot h_o \cdot \theta_0} = \frac{k \cdot m \cdot A_c \cdot th(m \cdot L)}{P \cdot L \cdot h_o}$$

$$\eta_f = \frac{th(m \cdot L)}{m \cdot L}$$

2.4. Flujo de calor máximo de la aleta

$$\dot{Q}_M = A_l \cdot h_o \cdot (t_o - t_{f,o}) = P \cdot L \cdot h_o \cdot \theta_o$$

3. ALETA ANULAR DE PERFIL RECTANGULAR UNIFORME



- Área de la sección recta de la aleta: $A_c(r) = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \delta$
- Superficie lateral exterior de la aleta: $A_l(r) = 2 \cdot \pi \cdot (r^2 - r_o^2)$

3.1. Distribución de temperatura en la aleta anular de perfil rectangular uniforme

$$\frac{\theta}{\theta_o} = \frac{t - t_{f,o}}{t_o - t_{f,o}} = \frac{I_0(n \cdot r) \cdot K_1(n \cdot r_e) + K_0(n \cdot r) \cdot I_1(n \cdot r_e)}{I_0(n \cdot r_o) \cdot K_1(n \cdot r_e) + K_0(n \cdot r_o) \cdot I_1(n \cdot r_e)}$$

$I_1(n \cdot r) = \frac{d(I_0(n \cdot r))}{d(n \cdot r)}$ y $K_1(n \cdot r) = -\frac{d(K_0(n \cdot r))}{d(n \cdot r)}$ son funciones de Bessel de primer orden modificadas de primera y segunda clase.

3.2. Calor disipado por la aleta anular de perfil rectangular uniforme:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= -k \cdot A_o \cdot \left(\frac{dt}{dr}\right)_{r=r_o} \\ &= 2 \cdot \pi \cdot k \cdot r_o \cdot \delta \cdot \theta_o \cdot n \cdot \frac{K_1(n \cdot r_o) \cdot I_1(n \cdot r_e) - I_1(n \cdot r_o) \cdot K_1(n \cdot r_e)}{I_0(n \cdot r_o) \cdot K_1(n \cdot r_e) + K_0(n \cdot r_o) \cdot I_1(n \cdot r_e)} \end{aligned}$$

3.2.1. Flujo de calor no despreciable en el extremo

Se utiliza la suposición de extremo adiabático, pero con una longitud de aleta corregida:

$$r_{1c} = r_1 + \frac{\delta}{2}$$

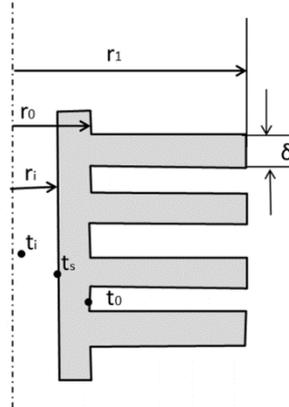
3.3. Efectividad de la aleta anular de perfil rectangular

$$\eta_f = \frac{2 \cdot r_o}{n \cdot (r_e^2 - r_o^2)} \cdot \frac{K_1(n \cdot r_o) \cdot I_1(n \cdot r_e) - I_1(n \cdot r_o) \cdot K_1(n \cdot r_e)}{I_0(n \cdot r_o) \cdot K_1(n \cdot r_e) + K_0(n \cdot r_o) \cdot I_1(n \cdot r_e)} \tag{3.28}$$

3.4. Flujo de calor máximo:

$$\dot{Q}_M = A_{l,total} \cdot h_o \cdot (t_o - t_{f,o}) = 2 \cdot \pi \cdot h_o \cdot (r_e^2 - r_o^2) \cdot (t_o - t_{f,o}) = 2 \cdot \pi \cdot h_o \cdot (r_e^2 - r_o^2) \cdot \theta_o$$

3.5. Coeficiente global de transmisión de calor en tubos aleteados y aletas del tipo de aletas anulares de perfil rectangular uniforme.



3.5.1. Coeficiente global de transmisión de calor exacto:

$$U_o = \frac{1}{\left[\left(\frac{A_o}{A_i}\right) \frac{1}{h_i} + \frac{A_o}{2\pi \cdot L_t} \cdot \frac{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}{k} + \frac{1}{h_o} \cdot \frac{A_o}{A_t + A_f \cdot \eta_f} \right]}$$

$$U_o = \frac{1}{\left[\left(\frac{A_o}{A_i}\right) \frac{1}{h_i} + \frac{A_o}{2\pi \cdot L_t} \cdot \frac{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}{k} + \frac{1}{h_o} \cdot \frac{1}{\frac{A_f}{A_o} \cdot (\eta_f - 1) + 1} \right]}$$

3.5.2. Transmisión de calor tubos aleteados y aletas anulares de perfil rectangular uniforme, cálculo exacto:

$$\dot{Q} = \frac{(t_{f,i} - t_{f,o})}{\left[\frac{1}{A_i \cdot h_i} + \frac{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}{2\pi k \cdot L_t} + \frac{1}{A_t + A_f \cdot \eta_f} \cdot \frac{1}{h_o} \right]}$$

3.5.3. Coeficiente global de transmisión de calor aproximado:

$$U_o = \frac{1}{\left[\left(\frac{A_o}{A_i}\right) \frac{1}{h_i} + \frac{A_o}{2\pi \cdot L_t} \cdot \frac{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}{k} + \frac{1}{\eta_f \cdot h_o} \right]}$$

3.5.4. Transmisión de calor tubos aleteados y aletas anulares de perfil rectangular uniforme, cálculo exacto:

$$\dot{Q} = \frac{2\pi \cdot L_t \cdot (t_{f,i} - t_{f,o})}{\left[\frac{1}{r_i \cdot h_i} + \frac{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}{k} + \frac{1}{[(r_e^2 - r_o^2) \cdot n + r_o \cdot (1 - n \cdot \delta)] \cdot \eta_f \cdot h_o} \right]}$$

3.5.5. Otras definiciones

1. Área interior del tubo:

$$A_i = 2 \cdot \pi \cdot r_i \cdot L_t$$

L_t : longitud del tubo aleteado.

2. Área exterior del tubo (formada por el área de las aletas y el área exterior del tubo entre aleta y aleta):

$$A_o = A_f + A_t = 2\pi \cdot [(r_e^2 - r_o^2) \cdot n + r_o \cdot (1 - n \cdot \delta)] \cdot L_t$$

A_o (m^2): área de la superficie total expuesta, incluyendo la superficie aleteada y sin aletear.

A_f (m^2): área de la superficie de aletas expuesta

A_t (m^2): área del tubo sin tener en cuenta las aletas

n : número de aletas por metro de tubo

3. Flujo de calor desde el fluido interior a la superficie interior del tubo:

$$\dot{Q}(W) = A_i \cdot h_i \cdot (t_{f,i} - t_i)$$

4. Flujo de calor por conducción a través del espesor del tubo:

$$\dot{Q}(W) = \frac{2\pi k \cdot L_t \cdot (t_i - t_o)}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}$$

5. Calor disipado por unidad de tiempo desde la superficie aleteada al exterior:

$$\dot{Q}(W) = [2 \cdot \pi \cdot (r_1^2 - r_o^2) \cdot n \cdot \eta_a + 2 \cdot \pi \cdot r_o \cdot (1 - n \cdot \delta)] \cdot L_t \cdot h_{ext} \cdot (t_o - t_{f,o})$$

$$\dot{Q}(W) = (A_t + A_f \cdot \eta_f) \cdot h_o \cdot (t_o - t_{f,o})$$