ÍNDICE

Prólogo 17

Notaciones y símbolos 19

I
TEORÍA DE LA ELASTICIDAD

Tema 1. **Métodos energéticos de cálculo** 25
1.1. Introducción 27
1.2. Trabajo de las fuerzas exteriores 27
1.3. Trabajo interno de deformación 30
1.4. Teorema de Castigliano 35
1.5. Sistemas hiperestáticos. Teorema del trabajo mínimo 39
1.5.1. Sistemas exteriormente hiperestáticos 40
1.5.2. Sistemas interiormente hiperestáticos 41
1.6. Teorema de reciprocidad 42
1.7. Observaciones sobre los teoremas energéticos 45
1.8. Principio de los trabajos virtuales 45
1.8.1. Sistemas ideales 46
1.8.2. Sistemas reales 48
1.8.3. Consideraciones sobre el principio de los trabajos virtuales 52
Ejercicios de autocomprobación 52
Soluciones de los ejercicios de autocomprobación 55

Tema 2. **El problema elástico: planteamiento y solución** 77
2.1. Introducción 79

2.2. Planteamiento general del problema elástico 80
2.3. Planteamiento del problema elástico en tensiones: Ecuaciones de Michell y Beltrami 82
2.4. Planteamiento del problema elástico en desplazamientos: Ecuaciones de Navier 87
2.5. Vector de Galerkin 90
2.6. El potencial de deformación de Lamé y su relación con el vector de Galerkin 94
2.7. Tensiones termoelásticas 96
2.8. Unicidad de la solución 101
Ejercicios de autocomprobación 102
Soluciones de los ejercicios de autocomprobación 103

Tema 3. **Elasticidad plana en coordenadas cartesianas** 113
3.1. Generalidades 115
3.2. Estado plano de tensión 115
3.3. Estado plano de deformación 117
3.4. Estudio del estado tensional en el entorno de un punto 119
3.5. Los círculos de Mohr en elasticidad plana 122
3.6. Planteamiento del problema elástico en los sistemas planos 126
3.7. Función de tensiones o función de Airy 130
3.8. Soluciones polinómicas de la función de Airy 132
3.9. Curvas representativas de los estados elásticos planos 138
Ejercicios de autocomprobación 142
Soluciones de los ejercicios de autocomprobación 146

Tema 4. **Elasticidad en coordenadas cilíndricas** 167
4.1. Generalidades 169
4.2. Análisis de tensiones 170
4.3. Análisis de deformaciones 172
4.4. Estados de tensión axisimétricos 175

4.5. Función de tensiones o función de Love 178
Ejercicios de autocomprobación 183
Soluciones de los ejercicios de autocomprobacion 184

Tema 5. **Elasticidad plana en coordenadas polares** 191
5.1. Introducción 193
5.2. Planeamiento de los problemas elásticos planos en coordenadas polares 193
5.3. Distribución de tensiones simétricas respecto a un eje 198
5.4. Tubos de pared gruesa 201
5.5. Influencia de un orificio circular en una placa o laja sometida a esfuerzo longitudinal o cortante 208
5.6. Cuña plana cargada en la punta 216
5.7. Placa semiindefinida con carga concentrada 222
Ejercicios de autocomprobación 226
Soluciones de los ejercicios de autocomprobación 228

Tema 6. **Teoría general de la torsión** 239
6.1. Introducción 241
6.2. Torsión de barras prismáticas de sección cualquiera 241
6.2.1. Planteamiento general del problema 241
6.2.2. Analogía de la membrana 249
6.3. Torsión de perfiles delgados 253
6.3.1. Perfiles delgados abiertos 253
6.3.2. Perfiles delgados cerrados 257
6.4. Flexión y torsión de perfiles delgados 262
6.4.1. Efecto de torsión en la flexión simple de perfiles delgados 263
6.4.2. Características sectoriales 267
6.4.3. Torsión no uniforme o restringida de perfiles delgados 275

6.4.4. Caso general de carga 280
6.5. Torsión de barras de sección circular variable 283
Ejercicios de autocomprobación 287
Soluciones de los ejercicios de autocomprobación 290

II
RESISTENCIA DE MATERIALES

Tema 7. **Sistemas planos reticulados de nudos articulados** 301
7.1. Generalidades 303
7.2. Sistemas planos 304
7.3. Sistemas planos reticulados de nudos articulados 308
7.4. Método de Cremona 312
7.5. Método de Ritter 314
7.6. Cálculo de los desplazamientos de los nudos 315
7.7. Observaciones sobre los sistemas planos triangulados 317
Ejercicios de autocomprobación 319
Soluciones de los ejercicios de autocomprobación 321

Tema 8. **Barras curvas** 327
8.1. Generalidades 329
8.2. Relaciones entre las acciones M, N y C 330
8.3. Barras de pequeña curvatura. Arcos 331
8.4. Deformación del eje geométrico en los arcos 332
8.5. Curva de presiones 336
8.6. Arco de tres articulaciones 337
8.7. Arco de dos articulaciones 339
8.8. Arco empotrado 342
8.9. Barras de fuerte curvatura inicial 344
8.9.1. Flexión pura 344
8.9.2. Esfuerzo normal 349
8.9.3. Deformaciones 350

8.9.4. Observaciones ... 351
8.10. Cálculo aproximado de anillos y eslabones de cadena ... 353
Ejercicios de autocomprobación ... 356
Soluciones de los ejercicios de autocomprobación ... 358

Tema 9. **Sólidos laminares** ... 365
9.1. Características fundamentales de los sólidos laminares ... 367
9.2. Estudio general de la flexión de placas ... 368
9.2.1. Condiciones de contorno ... 375
9.3. Flexión de placas circulares simétricamene cargadas ... 376
9.4. Flexión de placas rectangulares ... 381
9.5. Bóvedas simétricas de pequeño espesor, sometidas a presión interna ... 383
9.6. Depósitos de pared delgada ... 385
9.7. Observaciones sobre la teoría de la membrana ... 387
9.8. Inestabilidad de tubos y anillos sometidos a presión externa ... 388
Ejercicios de autocomprobación ... 393
Soluciones de los ejercicios de autocomprobación ... 394

Tema 10. **Cargas móviles** ... 399
10.1. Introducción ... 401
10.2. Líneas de influencia ... 401
10.3. Determinación de las líneas de influencia ... 403
10.3.1. Método directo ... 404
10.3.2. Aplicación del principio de los trabajos virtuales ... 406
10.3.3. Utilización del teorema de reciprocidad ... 408
10.3.4. Cargas indirectas ... 410
10.4. Diagramas de efectos máximos ... 412
10.4.1. Viga apoyada, sometida a carga móvil uniformemente repartida, de mayor longitud que su luz ... 412

10.4.2. Viga apoyada, sometida a una carga móvil concentrada, P 416
10.4.3. Determinación del momento flector máximo absoluto en una viga apoyada en sus extremos, recorrida por un tren de cargas 417
Ejercicios de autocomprobación 419
Soluciones de los ejercicios de autocomprobación 421

Tema 11. **Cargas alternativas. Teoría de la fatiga** 429
11.1. Generalidades 431
11.2. Estudio de la resistencia a la fatiga 433
11.3. Roturas por fatiga 435
11.4. Límite de resistencia a la fatiga 437
11.5. Ciclos asimétricos de carga 440
11.6. Influencia de diversos factores en la resistencia a la fatiga 441
11.6.1. Concentración de tensiones 441
11.6.2. Factores de escala y de sensibilidad superficial 444
11.6.3. Otros factores 445
11.7. Grado de seguridad a la fatiga 446
11.8. Fatiga en materiales pétreos 449
11.9. Estudio de la resistencia a la fatiga según el Código Técnico de la Edificación 449
11.9.1. Campo de aplicación 450
11.9.2. Símbolos 450
11.9.3. Método del daño acumulado 451
11.9.4. Cálculo de las carreras de tensiones 453
11.9.5. Resistencia a la fatiga 454
11.9.6. Combinación de tensiones normales y tangenciales 456
Ejercicios de autocomprobación 457
Soluciones de los ejercicios de autocomprobación 458

Tema 12. **Acción dinámica de las cargas** 463
12.1. Generalidades 465
12.2. Teoría elemental de la tracción por choque 465
12.3. Flexión producida por choque 468
12.4. Observaciones sobre las acciones con impacto 471
12.5. Vibraciones en los sistemas elásticos: Consideraciones generales 472
12.6. Sistemas con un grado de libertad 473
12.6.1. Vibraciones armónicas libres 474
12.6.2. Vibraciones libres torsionales 476
12.6.3. Vibraciones armónicas libres amortiguadas 478
12.6.4. Vibraciones armónicas forzadas 481
12.6.5. Consideración de la masa del sistema elástico. Método de Rayleigh 487
12.7. Sistemas con varios grados de libertad 491
12.8. Vibraciones en sistemas continuos 493
Ejercicios de autocomprobación 498
Soluciones de los ejercicios de autocomprobación 499

Tema 13. **Criterios de agotamiento. Estudio de sólidos sometidos a deformaciones plásticas** 507
13.1. Introducción 509
13.2. Criterios de agotamiento: generalidades 510
13.3. Criterio de Rankine y Lamé 518
13.4. Criterio de Saint-Venant y Poncelet 520
13.5. Criterio de Tresca-Guest 522
13.6. Criterio de Beltrami y Haigh 525
13.7. Criterio de Von Mises y Hencky 528
13.8. Criterios dependientes del invariante I_1 533
13.9. Teoría de la curva intrínseca 536
13.10. Aplicaciones de los métodos plásticos al cálculo de barras prismáticas cargadas en su plano 541

13.10.1. Piezas sometidas a esfuerzo longitudinal 544
13.10.2. Barras sometidas a flexión 545
13.10.3. Tensiones residuales 554
13.10.4. Observaciones 556
13.11. Torsión de barras prismáticas más allá del límite elástico 557
13.11.1. Torsión plástica de barras de sección circular 557
13.11.2. Torsión de barras prismáticas de sección cualquiera: Analogía del montón de arena 561
13.11.3. Tensiones residuales 565
Ejercicios de autocomprobación 569
Soluciones de los ejercicios de autocomprobación 572

Apéndice 1. **Geometría de masas aplicada a las áreas planas** 593

Apéndice 2. **Tablas de perfiles laminados** 603

Bibliografía 613

1.1. INTRODUCCIÓN

La resolución de gran número de problemas elásticos se ve facilitada cuando se utilizan métodos de cálculo basados en consideraciones energéticas. En particular, los métodos energéticos de cálculo son de gran utilidad en el cálculo de deformaciones y en la determinación de las reacciones en los vínculos de barras o sistemas de barras hiperestáticos, cuando se encuentran sometidos a distintos tipos de carga.

Estudiaremos, en primer lugar, los métodos basados en la consideración del trabajo interno de deformación para, posteriormente, exponer el principio de los trabajos virtuales, cuya aplicación es de mayor generalidad que la de aquéllos y, además, no está sometida a ninguna restricción.

1.2. TRABAJO DE LAS FUERZAS EXTERIORES

Consideraremos (figura 1.1) un sólido elástico de forma cualquiera sometido a una solicitación exterior que, para mayor sencillez, supondremos que consiste en la actuación de un sistema de cargas mecánicas.

Supondremos que las cargas se aplican estáticamente, de forma que van creciendo lentamente desde su valor inicial, nulo, hasta su valor final, por lo que no se producen aceleraciones sensibles, no originándose, por tanto, energía cinética alguna.

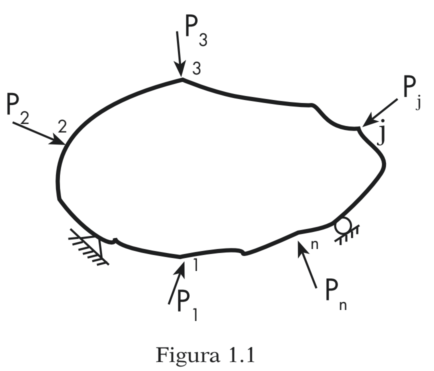

Figura 1.1

Igualmente, supondremos que los rozamientos en los vínculos o apoyos son despreciables por lo que, en los mismos, no se desprende energía en forma de calor.

En estas condiciones, el trabajo realizado por las fuerzas exteriores, T_e, se utiliza, exclusivamente, en la deformación del sólido, venciendo sus resistencias mecánicas internas, por lo que se transforma en energía interna de deformación, T_i, por lo que podemos escribir:

$$T_e = T_i \qquad [1.1]$$

Al ser el trabajo de las fuerzas exteriores una magnitud conservativa, que depende exclusivamente de sus estados inicial y final y no del orden en que se aplican las cargas, cabe decir, en virtud de [1.1], que la energía interna de deformación es, asimismo una magnitud conservativa.

Consideraremos, adicionalmente, que el material constitutivo del sólido cumple la ley de Hooke y que las deformaciones originadas por las cargas no inciden en la forma de actuar éstas, por lo que la solicitación exterior origina un régimen elástico de pequeñas deformaciones y pequeños desplazamientos, siendo de aplicación el principio de superposición de efectos(*); de acuerdo con estas suposiciones, la energía interna de deformación recibe el nombre de energía potencial elástica o potencial interno de deformación.

Deduciremos la expresión del trabajo de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sólido de la figura 1.1, considerando que sus puntos de aplicación experimentan, en su propia dirección, unos desplazamientos $\delta_1, \delta_2 \ldots\ldots \delta_n$ (figura 1.2).

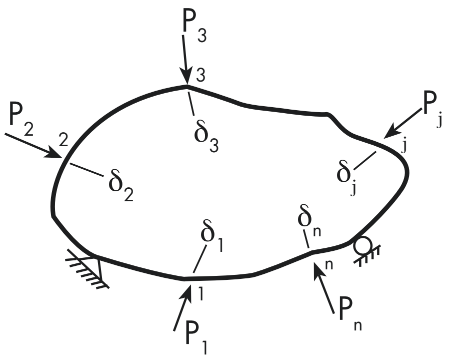

Figura 1.2

Como el trabajo T_e es una magnitud conservativa supondremos que, todas las fuerzas crecen simultáneamente, alcanzando en un momento dado, los valores $kP_1, kP_2 \ldots\ldots kP_n$.

(*) No ocurre así en los problemas de inestabilidad y pandeo.

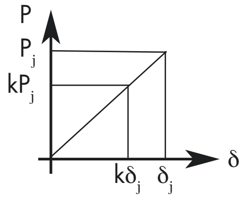

Figura 1.3

Ya que se cumple la ley de Hooke, los desplazamientos habrán alcanzado los valores $k\delta_1$, $k\delta_2$.......$k\delta_n$, siendo proporcionales a las cargas aplicadas como se representa para la carga P_j en la figura 1.3.

Cuando la carga P_j y el desplazamiento de su punto de aplicación δ_j alcanzan sus valores finales, el trabajo desarrollado es $\frac{P_j\delta_j}{2}$; considerando todas las cargas, el trabajo de las fuerzas exteriores es:

$$T_e = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} P_j\delta_j \qquad [1.2]$$

La fórmula [1.2] es la expresión del teorema de Clapeyron, que puede enunciarse como sigue:

«Cuando sobre un sólido elástico actúa un sistema de fuerzas exteriores, el trabajo desarrollado por las mismas es igual a la semisuma de los productos de sus valores por los de los desplazamientos de sus puntos de aplicación medidos en su propia dirección, siendo dicho trabajo independiente del orden en que se aplican las cargas»(*).

Al estar relacionados linealmente esfuerzos y desplazamientos, el trabajo de las fuerzas exteriores se puede escribir como función cuadrática de unos u otros.

Si los apoyos o vínculos son imperfectos, sufriendo desplazamientos elásticos, se añaden términos a la expresión [1.2], en los que el esfuerzo es la reacción en el vínculo.

Cuando alguna de las cargas exteriores sea un par, M, el término correspondiente en la ecuación [1.2] será $\frac{M\varphi}{2}$, donde φ es el ángulo girado por el punto de aplicación del par, medido en la dirección de este último.

(*) Los valores de fuerzas y desplazamientos son los valores finales.