

ÍNDICE

<i>Prólogo</i>	9
Capítulo 1. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS. GENERALIDADES ..	11
Introducción teórica	13
Ejercicios resueltos.....	16
Capítulo 2. INTEGRACIÓN DE LA ECUACIÓN DE PRIMER ORDEN. LA ECUACIÓN LINEAL.....	31
Introducción teórica	33
Ejercicios resueltos.....	41
Capítulo 3. ECUACIONES DE ORDEN SUPERIOR.....	117
Introducción teórica	119
Ejercicios resueltos.....	126
Capítulo 4. ECUACIONES LINEALES DE COEFICIENTES CONSTANTES.....	155
Introducción teórica	157
Ejercicios resueltos.....	162
Capítulo 5. LA TRANSFORMADA DE LAPLACE	221
Introducción teórica	223
Ejercicios resueltos.....	229
Capítulo 6. SOLUCIONES DEFINIDAS POR SERIES.....	267
Introducción teórica	269
Ejercicios resueltos.....	273
Capítulo 7. SISTEMAS DE ECUACIONES.....	303
Introducción teórica	305
Ejercicios resueltos.....	315

<i>Capítulo 8. ESTABILIDAD DE SOLUCIONES. SISTEMAS NO LINEALES.....</i>	359
Introducción teórica.....	361
Ejercicios resueltos.....	367
 <i>Capítulo 9. ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. GENERALIDADES</i>	405
Introducción teórica.....	407
Ejercicios resueltos.....	413
 <i>Capítulo 10. ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES LINEALES DE SEGUN-</i> <i>DO ORDEN. SEPARACIÓN DE VARIABLES.....</i>	423
Introducción teórica.....	425
Ejercicios resueltos.....	429

Introducción teórica

1. La ecuación diferencial ordinaria de orden n

Tiene como expresión general $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$. Si se puede despejar $y^{(n)}$, entonces resulta

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (3.1)$$

en donde f se supone definida en un cierto dominio Ω de R^{n+1} .

2. Problema de Cauchy

Dada la ecuación (3.1), y las condiciones iniciales

$$y_0 = y(x_0), \quad y_1 = y'(x_0), \quad \dots, y_{n-1} = y^{(n-1)}(x_0) \quad (3.2)$$

¿Existe alguna función $y = y(x)$ que cumpla la ecuación (3.1) con las condiciones (3.2)?

3. Teorema de existencia y unicidad de solución

Sean la ecuación (3.1) y las condiciones iniciales (3.2). Si la función f satisface

- a) f es continua en su dominio de definición.
- b) f posee derivadas parciales continuas

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \frac{\partial f}{\partial y''}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} \quad \text{en } \Omega$$

entonces existe una única solución $y = \varphi(x)$ de la ecuación que satisface las condiciones iniciales.

4. Solución general y solución particular

Si Ω es el dominio en el que la ecuación de orden n : $y^{(n)} = (x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ cumple las condiciones de existencia y unicidad de las soluciones, la **integral o solución general** tendrá la forma

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

donde $C_1, C_2, \dots, C_n$ son constantes arbitrarias. Una **Solución particular** es cada una de las funciones que se obtienen de la integral general al dar un valor determinado a cada constante C_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

5. Métodos elementales de integración

1. Ecuaciones de la forma $y^{(n)} = f(x)$.

Se integra sucesivamente y se obtiene la solución general.

$$y = \int \dots \int \left[\int f(x) dx \right] dx \dots dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + C_{n-1}x + C_n$$

2. Ecuaciones que no contienen la variable independiente: $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$

El cambio $y' = p$ reduce el orden de la ecuación en una unidad. Se considera p función de y , con lo que

$$y' = \frac{dy}{dx} = p \quad ; \quad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$$

$$y''' = \frac{d(y'')}{dx} = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dp}{dy} + p \frac{d}{dx} \left(\frac{dp}{dy} \right) = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dp}{dy} + p \frac{d^2 p}{dy^2} \cdot \frac{dy}{dx} = p \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 + p^2 \frac{d^2 p}{dy^2}$$

Sustituyendo estas derivadas en la ecuación, resulta

$$G(y, p, p', \dots, p^{(n-1)}) = 0$$

en la que no figura la derivada de orden n .

3. Ecuaciones que no contienen a la función ni a sus derivadas hasta la de orden $m - 1$ inclusive: $F(x, y^{(m)}, \dots, y^{(n)}) = 0$

El cambio $y^{(m)} = p$ reduce el orden m de la ecuación hasta el orden $n - m$.

La ecuación se transforma en $G(x, p, p', \dots, p^{(n-m)}) = 0$, cuya solución será de la forma $p = f(x, C_1, \dots, C_{n-m})$. La solución general de la ecuación inicial se obtendrá integrando sucesivamente m veces la ecuación $y^{(m)} = f(x, C_1, \dots, C_{n-m})$

4. Ecuaciones homogéneas respecto a la función y sus derivadas.

Si la ecuación $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ es homogénea de grado p respecto a la función y sus derivadas, es decir:

$$F(x, \lambda y, \lambda y', \dots, \lambda y^{(n)}) = \lambda^p F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}),$$

entonces su orden se reduce en una unidad mediante el cambio

$$z = \frac{y'}{y}, \text{ o lo que es lo mismo } y = e^{\int z dx}.$$

5. Ecuaciones que son derivadas exactas de expresiones diferenciales.

Si $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ es la derivada de una expresión diferencial de orden $n - 1$, la ecuación primitiva puede resolverse fácilmente poniéndola como derivada de esa expresión diferencial. Esta expresión diferencial se llama **primera integral** de la ecuación, la cual igualada a una constante será de un orden menor que la primitiva, y con ello teóricamente más sencilla de resolver.

6. Ecuaciones lineales de orden n

Su expresión general es

$$\frac{d^n y}{dx^n} + h_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + h_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + h_n(x) y = F(x) \quad (3.3)$$

con $h_1(x)$, $h_2(x)$, ..., $h_n(x)$ y $F(x)$ funciones continuas en un cierto intervalo real (a, b) de valores de x . Si $F(x) = 0$, la ecuación se llama **ecuación homogénea** asociada a la **ecuación lineal completa** que es la expresión (3.3).

Aunque de forma estricta en una ecuación lineal no es necesaria la continuidad de las funciones $h_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ y $F(x)$, consideraremos aquí solo aquellas en las que sí son continuas esas funciones. En ese caso, el problema de valores iniciales:

$$y^{(n)} = -h_1(x)y^{(n-1)} - \dots - h_n(x)y + F(x)$$

$$y_0 = y(x_0), \quad y_1 = y'(x_0), \quad \dots, y_{n-1} = y^{(n-1)}(x_0)$$

en todo punto x_0 del intervalo real de definición de las funciones, tiene solución única (obsérvese que en ese caso se cumplen las hipótesis del teorema de existencia y unicidad).

7. El operador diferencial lineal

Es una aplicación tal que a toda función $y(x)$, derivable n veces, le hace corresponder la expresión

$$L(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + h_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + h_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + h_n(x)y$$

O de otra forma

$$L(y) = (D^n + h_1(x)D^{n-1} + \dots + h_n(x)D^0)y$$

donde D expresa la derivada de la función con el orden correspondiente.

Esto permite expresar de forma reducida la ecuación lineal homogénea asociada a (3.3) por $L(y) = 0$, y la completa por $L(y) = F(x)$. A L se le llama **operador diferencial lineal**.

Llamando $H(D)$ al polinomio

$$H(D) = (D^n + h_1(x)D^{n-1} + \dots + h_n(x)D^0)$$

la ecuación homogénea se puede expresar por $H(D)(y) = 0$, y la completa por $H(D)(y) = F(x)$, donde se expresa de forma explícita el polinomio en D . Este polinomio $H(D)$ se llama **polinomio operacional** asociado a la ecuación lineal.

8. Wronskiano de una familia de funciones

Dada una familia F de funciones $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ definidas y derivables hasta el orden $n - 1$ en un intervalo (a, b) de R , se llama wronskiano de F al determinante

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

- a) Si las funciones $y_1, \dots, y_n$ definidas y derivables hasta el orden $n - 1$ en un intervalo (a, b) de R son linealmente dependientes, su wronskiano es cero en dicho intervalo.

Como consecuencia: Si el wronskiano de un sistema de funciones es distinto de cero en un intervalo (a, b) de R , entonces es linealmente independiente en dicho intervalo.

- b) Sea la familia $y_1, \dots, y_n$ de soluciones particulares de la ecuación lineal homogénea

$$\frac{d^n y}{dx^n} + h_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + h_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + h_n(x) y = 0 \quad (3.5)$$

donde los coeficientes $h_1(x), h_2(x), \dots, h_n(x)$ son continuos en (a, b) . Si esa familia es linealmente independiente, su wronskiano es distinto de cero en todos los puntos de dicho intervalo.

9. Ecuación lineal homogénea

1. Espacio de soluciones. El conjunto de soluciones de una ecuación lineal homogénea de orden n tiene estructura de **espacio vectorial**

real de dimensión n con las operaciones usuales de suma de funciones y producto por un número real. Por lo tanto:

- a) *Toda combinación lineal, con coeficientes constantes, de soluciones de una ecuación lineal homogénea es también solución de ella.*
 - b) *Si la ecuación lineal homogénea con coeficientes reales tiene una solución compleja, la parte real de la misma y su parte imaginaria, por separado, son también soluciones de dicha ecuación.*
2. Sistema fundamental. Se llama **sistema fundamental** de soluciones de una ecuación lineal homogénea de orden n en (a,b) , al conjunto de n soluciones cualesquiera linealmente independientes.
 3. Solución general. Si $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación lineal homogénea (3.5), donde los coeficientes $h_1(x), h_2(x), \dots, h_n(x)$ son continuos en (a,b) , la expresión

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

para los distintos valores de C_i se llama **solución general** de la ecuación.

10. Ecuación lineal completa

1. Solución general. *La solución general de la ecuación lineal completa $L(y) = F(x)$ es la suma de una solución particular y la solución general de la ecuación homogénea $L(y) = 0$ asociada.*
2. Principio de superposición: *Si y_1 es solución general de la ecuación lineal completa $L(y) = F_1(x)$, e y_2 es solución de $L(y) = F_2(x)$, entonces $y_1 + y_2$ es solución de la ecuación $L(y) = F_1(x) + F_2(x)$.*

11. Método de reducción de orden

Una técnica interesante para la resolución de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas cuando se conoce una solución particular de la ecuación es el **método de reducción de orden**.

Si $y_1(x)$ es una solución particular de la ecuación de orden n

$$\frac{d^n y}{dx^n} + h_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + h_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + h_n(x) y = 0$$

entonces el cambio de variable $y = y_1(x) \cdot v(x)$ la transforma en una ecuación lineal homogénea de orden $n - 1$.