

ÍNDICE

<i>Prólogo</i>	17
<i>Notaciones y símbolos</i>	21

I

TEORÍA DE LA ELASTICIDAD

<i>Tema 1. INTRODUCCIÓN A LA ELASTICIDAD</i>	27
1.1. Objeto de la Teoría de la Elasticidad y de la Resistencia de materiales.....	29
1.2. Sólidos elásticos.....	30
1.3. Formas constructivas.....	31
1.4. Condiciones de equilibrio.....	32
1.5. Formas de trabajo en las secciones de una barra prismática.....	33
Ejercicios de autocomprobación.....	38
Soluciones de los ejercicios de autocomprobación.....	38
<i>Tema 2. ESTADO DE TENSIONES EN LOS PUNTOS DE UN SÓLIDO ELÁSTICO</i>	39
2.1. Concepto de tensión. Componentes intrínsecas.....	41
2.2. Ecuaciones de equilibrio interno.....	42
2.3. Tensión correspondiente a un plano de orientación arbitraria. Matriz de tensiones.....	47
2.4. Planos y tensiones principales.....	49
2.5. Representación gráfica del estado tensional en el entorno de un punto: Elipsoide de Lamé y cuádricas indicatrices y directrices de tensiones.....	53

2.6. Círculos de Mohr.....	55
2.7. Tensión esférica y tensión desviadora.....	61
2.8. Condiciones en el contorno.....	63
Ejercicios de autocomprobación.....	64
Soluciones de los ejercicios de autocomprobación.....	67
Tema 3. ESTADO DE DEFORMACIÓN EN EL ENTORNO DE UN PUNTO.....	83
3.1. Relaciones entre desplazamientos y deformaciones.....	85
3.2. Matriz de giro [P].....	87
3.3. Matriz de deformación [D].....	90
3.4. Vector deformación unitaria. Direcciones principales de deformación.....	93
3.5. Componentes intrínsecas del vector deformación.....	96
3.6. Representaciones gráficas del estado de deformación en el entorno de un punto.....	100
3.7. Deformaciones octaédricas.....	102
3.8. Ecuaciones de compatibilidad.....	103
Ejercicios de autocomprobación.....	106
Soluciones de los ejercicios de autocomprobación.....	108
Tema 4. RELACIONES ENTRE LOS ESTADOS DE TENSIÓN Y DE DEFORMACIÓN.....	123
4.1. Introducción.....	125
4.2. Ecuaciones generales.....	125
4.3. Determinación experimental de las relaciones entre tensiones y deformaciones. Ley de Hooke.....	126
4.4. Deformación transversal. Módulo de Poisson.....	134
4.5. Principio de superposición de efectos.....	136
4.6. Leyes de Hooke generalizadas.....	137
4.7. Ecuaciones de Lamé.....	144
Ejercicios de autocomprobación.....	147
Soluciones de los ejercicios de autocomprobación.....	150

II RESISTENCIA DE MATERIALES

<i>Tema 5.</i> INICIACIÓN AL ESTUDIO DE LA RESISTENCIA DE MATERIALES	167
5.1. Principios fundamentales en Resistencia de Materiales.....	169
5.2. Distintos tipos de apoyos.....	175
5.3. Sistemas isostáticos e hiperestáticos.....	181
5.4. Condiciones de seguridad.....	183
5.5. La seguridad según el Código Técnico de la Edificación (CTE).....	190
5.5.1. Verificaciones	191
5.5.2. Combinación de acciones	192
5.5.3. Materiales.....	194
5.5.3.1. Acero en chapas y perfiles	195
5.5.3.2. Tornillos, tuercas y arandelas	195
5.5.3.3. Resistencia de cálculo.....	196
5.5.4. Inestabilidad.....	196
Ejercicios de autocomprobación.....	197
Soluciones de los ejercicios de autocomprobación.....	198
 <i>Tema 6.</i> ESFUERZOS LONGITUDINALES	 199
6.1. Características de la tracción y la compresión simples.....	201
6.2. Relación entre tensiones y deformaciones.....	204
6.3. Cálculo de barras prismáticas sometidas a tracción o compresión.....	208
6.4. Barra prismática sometida a esfuerzo longitudinal teniendo en cuenta el peso propio	209
6.5. Sólido de igual resistencia a tracción o compresión	211
6.6. Barras de sección variable. Coeficiente de concentración de tensiones	214
6.7. Trabajo interno de deformación en barras sometidas a tracción o compresión.....	215

6.8. Tubos y depósitos de pared delgada sometidos a presión interior	217
6.9. Anillos delgados giratorios.....	220
6.10. Problemas hiperestáticos en tracción y compresión simples.....	223
6.11. Barras pretensadas	229
6.12. Tensiones de origen térmico	232
6.13. Tensiones derivadas del montaje.....	233
Ejercicios de autocomprobación.....	235
Soluciones de los ejercicios de autocomprobación.....	238
<i>Tema 7. TEORÍA ELEMENTAL DE LA CORTADURA</i>	251
7.1. Tensión cortante pura.....	253
7.2. Relación entre esfuerzo y deformación.....	254
7.3. Medios de unión.....	258
7.4. Uniones remachadas y atornilladas	258
7.5. Observaciones sobre las uniones remachadas y atornilladas.....	266
7.6. Uniones soldadas.....	267
7.7. Los medios de unión en el Código Técnico de la Edificación.....	270
7.7.1. Uniones atornilladas	270
7.7.1.1. Uniones mediante tornillos no pretensados ..	271
7.7.1.2. Uniones con tornillos pretensados.....	272
7.7.2. Uniones soldadas.....	274
Ejercicios de autocomprobación.....	275
Soluciones de los ejercicios de autocomprobación.....	278
<i>Tema 8. FLEXIÓN: ANÁLISIS DE TENSIONES</i>	285
8.1. Generalidades.....	287
8.2. Vigas.....	288
8.3. Diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores	291

8.4. Relaciones entre el momento flector, el esfuerzo cortante y la carga	298
8.5. Tensiones originadas por el momento flector	302
8.6. Secciones transversales más utilizadas	307
8.7. Trabajo interno de deformación debido a los momentos flectores	311
8.8. Tensiones originadas por el esfuerzo cortante	313
8.9. Indicaciones sobre las tensiones rasantes	320
8.10. Trabajo interno de deformación debido a los esfuerzos cortantes	321
8.11. Vigas armadas	324
Ejercicios de auto comprobación	329
Soluciones de los ejercicios de auto comprobación	331
<i>Tema 9. DEFORMACIÓN DE VIGAS SOMETIDAS A FLEXIÓN</i>	343
9.1. Introducción	345
9.2. Ecuación diferencial de la línea elástica	347
9.3. Ecuación universal de la elástica de una viga de rigidez constante	356
9.4. Teoremas de Mohr	360
9.5. Método de la viga conjugada	363
9.6. Efecto del esfuerzo cortante en la deformación de vigas sometidas a flexión simple	367
9.7. Vigas de sección variable	369
9.8. Resortes de ballesta	375
Ejercicios de auto comprobación	377
Soluciones de los ejercicios de auto comprobación	380
<i>Tema 10. FLEXIÓN ASIMÉTRICA Y FLEXIÓN HIPERESTÁTICA</i>	393
10.1. Introducción	395
10.2. Flexión desviada o asimétrica	396
10.3. Casos prácticos de flexión asimétrica	400

10.4. Vigas hiperestáticas. Generalidades.....	404
10.5. Vigas hiperestáticas de un solo tramo entre apoyos.....	406
10.5.1. Viga sobre dos apoyos articulados fijos	406
10.5.2. Viga apoyada en un extremo y perfectamente empotrada en el otro.....	410
10.5.3. Viga perfectamente empotrada en sus extremos.....	414
10.5.4. Vigas imperfectamente empotradas.....	416
10.6. Vigas continuas.....	419
10.6.1. Ecuación de los tres momentos.....	420
10.6.2. Asientos desiguales de los apoyos	424
10.6.3. Apoyos extremos de la viga continua.....	426
10.7. Vigas Gerber.....	427
Ejercicios de autocomprobación.....	430
Soluciones de los ejercicios de autocomprobación.....	434
<i>Tema 11. TORSIÓN</i>	465
11.1. Generalidades.....	467
11.2. Teoría elemental de la torsión de barras de sección circular.....	468
11.3. Árboles de transmisión.....	473
11.4. Torsión de barras prismáticas de sección no circular.....	474
11.5. Trabajo interno de deformación debido a los momentos torsores	476
11.6. Diagramas de momentos torsores.....	477
Ejercicios de autocomprobación.....	481
Soluciones de los ejercicios de autocomprobación.....	482
<i>Tema 12. SOLICITACIONES COMPUESTAS</i>	487
12.1. Generalidades.....	489
12.2. Flexión y cortadura.....	491
12.3. Torsión y cortadura.....	493
12.4. Flexión y torsión de barras de sección circular.....	496

Ejercicios de autocomprobación.....	499
Soluciones de los ejercicios de autocomprobación.....	501
Tema 13. FLEXION COMPUESTA.....	513
13.1. Introducción	515
13.2. Soporte sometido a esfuerzos horizontal y vertical	516
13.3. Cargas excéntricas en cuerpos de poca esbeltez	519
13.4. Núcleo de la sección	523
13.5. Materiales no resistentes a tracción.....	526
13.6. Muros de sostenimiento.....	529
Ejercicios de autocomprobación.....	533
Soluciones de los ejercicios de autocomprobación.....	535
Tema 14. INESTABILIDAD EN SISTEMAS ELÁSTICOS DEFORMABLES.....	545
14.1. Introducción	547
14.2. Estabilidad.....	547
14.3. Barra esbelta sometida a compresión excéntrica	549
14.4. Pandeo de una barra esbelta, articulada en sus extremos, sometida a compresión centrada	554
14.5. Otros casos de barras esbeltas sometidas a compresión centrada.....	557
14.6. Longitud de pandeo.....	562
14.7. El pandeo en el campo plástico. Límites de aplicación de la fórmula de Euler.....	564
14.8. Cálculo práctico de barras esbeltas comprimidas. Método de los coeficientes ω	567
14.9. Barras esbeltas sometidas a flexión y compresión.....	568
14.10. Consideraciones sobre el fenómeno de pandeo	569
14.11. Cálculo de barras esbeltas comprimidas de acuerdo con el código técnico de la edificación	571
14.11.1. Tipos de Sección	571
14.11.2. Pandeo de barras comprimidas	573

Ejercicios de autocomprobación.....	577
Soluciones de los ejercicios de autocomprobación.....	581
<i>Apéndice 1. GEOMETRÍA DE MASAS APLICADA A LAS ÁREAS PLANAS.....</i>	<i>593</i>
<i>Apéndice 2. LOS CÍRCULOS DE MOHR EN ELASTICIDAD BIDIMENSIONAL ..</i>	<i>603</i>
<i>Apéndice 3. TABLAS DE PERFILES LAMINADOS.....</i>	<i>617</i>
<i>Apéndice 4. TABLAS DE COEFICIENTES ω.....</i>	<i>631</i>
<i>Bibliografía.....</i>	<i>635</i>

1.1. OBJETO DE LA TEORÍA DE LA ELASTICIDAD Y DE LA RESISTENCIA DE MATERIALES

El objeto, tanto de la Teoría de la Elasticidad como de la Resistencia de Materiales, es, en términos generales, el siguiente: Dado un sólido, de forma cualquiera, en equilibrio, sometido a una sollicitación exterior, determinar, en cada punto del mismo, los valores de los esfuerzos internos originados, así como los desplazamientos producidos.

La sollicitación exterior a la que hacemos referencia puede ser de varios tipos: mecánica, térmica o reológica (diferida en el tiempo), por citar sólo las más frecuentes. En lo que sigue y para mayor sencillez, consideraremos, por lo general, que el sólido está sometido a acciones mecánicas (fuerzas y pares), así como a las correspondientes reacciones que hacen posible su equilibrio. Esta suposición no resta generalidad a la resolución de los problemas elásticos.

El problema que se presenta en un sólido sometido a una sollicitación exterior y a uniones o vínculos con otros sólidos (figura 1.1) se traduce en que el mismo experimenta un estado de deformación que hace que varíen las distancias entre las partículas que lo constituyen (estén dispuestas o no según los elementos de una red cristalina), lo que origina una modificación de las fuerzas internas de cohesión molecular que, por unidad de superficie, llamaremos estado tensional. Tanto la Teoría de la Elasticidad como la Resistencia de Materiales tienen como objetivo relacionar la sollicitación exterior con los valores de las tensiones y de los desplazamientos de los puntos del

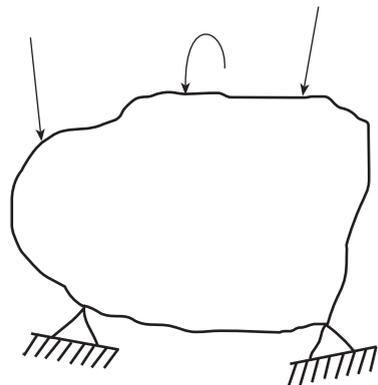


Figura 1.1

sólido, de forma que unas y otros no sobrepasen valores prefijados en atención a criterios de seguridad, lo que conduce a dimensionar adecuadamente el sólido o a comprobar las condiciones de seguridad cuando éste está totalmente definido en cuanto a su geometría.

La Elasticidad y la Resistencia de Materiales pueden considerarse como enfoques parciales de una ciencia más amplia que podemos denominar «Mecánica del sólido deformable», utilizando aquélla criterios más generales y métodos principalmente matemáticos, mientras que en Resistencia de Materiales se hacen diversas hipótesis simplificadoras. En cualquier caso, es necesario, antes de seguir adelante, definir qué se entiende por sólido deformable.

1.2. SÓLIDOS ELÁSTICOS

Para el estudio de los sólidos que se realiza en la Teoría de la Elasticidad se parte inicialmente de los postulados de la Mecánica, así como de las propiedades de los materiales (que se conocen experimentalmente) y de hipótesis referentes a las deformaciones de los sólidos. Ya que en Mecánica se considera que los sólidos son indeformables es necesario establecer las siguientes categorías de los mismos:

- a) Sólido rígido
- b) Sólido deformable
- c) Sólido real

a) Sólido rígido: Se define como tal aquél en el que las distancias entre sus partículas no varía, sea cual sea la sollicitación a la que esté sometido. Este es el tipo de sólidos que considera la Mecánica y su consideración dejaría sin objetivo tanto a la Elasticidad como a la Resistencia de Materiales. Sin embargo, tal suposición conduce a dos consecuencias erróneas:

1. No es posible la rotura de tal sólido, supuesto en equilibrio, lo que está en contradicción con la realidad ya que para grandes valores de las cargas los sólidos se deforman y rompen.
2. No existe solución a los problemas hiperestáticos, entendiendo por tales, en primera aproximación, aquéllos en que hay exceso de vínculos o uniones del sólido con otros sólidos.

b) Sólido deformable: Es aquél que ante una sollicitación exterior se deforma recuperando total o parcialmente su forma primitiva al desaparecer dicha sollicitación.

Se considera que los sólidos deformables cumplen las siguientes hipótesis:

1. Continuidad, lo que significa que no hay huecos entre sus partículas.
2. Homogeneidad, de forma que cualquier parte del sólido tiene las mismas propiedades que el mismo, en su conjunto o a nivel infinitesimal.
3. Isotropía, lo que quiere decir que sus propiedades son las mismas o varían por igual en cualquier dirección considerada.

Si además se cumple la propiedad de elasticidad, por la que se admite que el sólido recupera totalmente su forma primitiva al desaparecer la sollicitación exterior, el sólido deformable recibe el nombre de sólido elástico. La Resistencia de Materiales estudia, en general, los sólidos deformables, mientras que la Teoría de la Elasticidad considera solamente los sólidos elásticos, admitiéndose en la mayor parte de los problemas que las deformaciones, ya sean elásticas o permanentes son muy pequeñas frente a las dimensiones del sólido:

c) Sólido real: Es aquel sólido deformable en el que no se cumplen las hipótesis de continuidad, homogeneidad e isotropía. También recibe el nombre de sólido natural o verdadero.

En el estudio y desarrollo de la Teoría de la Elasticidad consideraremos que los materiales que constituyen los sólidos considerados permiten suponer que éstos tienen comportamiento elástico, al menos a nivel macroscópico.

1.3. FORMAS CONSTRUCTIVAS

Aunque la Teoría de la Elasticidad puede abordar el estudio de cualquier tipo de sólido sometido a una determinada sollicitación, en las aplicaciones prácticas la forma de los sólidos se reduce principalmente a los dos tipos que seguidamente detallamos: sólido tipo barra y sólido tipo bóveda.

a) Barra: Definimos como barra o prisma mecánico un sólido en que una de sus dimensiones, la longitud, es mucho mayor que las otras, conte-

nidas en su sección transversal (figura 1.2.) Tal definición equivale, geoméricamente a la siguiente: Una barra es el sólido engendrado por un área plana S , cuyo centro de gravedad describe una curva c , manteniéndose normal a la misma. El área S recibe el nombre de sección transversal de la barra y puede variar a lo largo de su longitud.

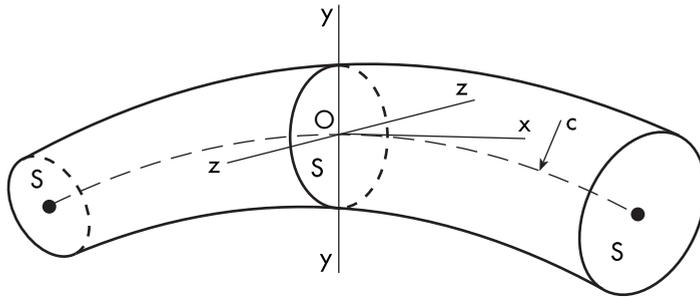


Figura 1.2

La curva c recibe el nombre de eje o directriz de la barra o prisma mecánico; éste será alabeado, plano o recto si la directriz es alabeada, plana o recta.

En las aplicaciones constructivas, tanto en edificación como en maquinaria, las barras no son alabeadas sino que están contenidas en un plano que es plano de simetría de las mismas. Ejemplos de sólidos tipo barra son las vigas y pilares, en edificación y los ejes de transmisión, en maquinaria.

b) Bóveda: Corresponden a este tipo de sólidos los cuerpos en los que una dimensión, el espesor, es mucho menor que las otras dos. Ejemplo de este tipo de sólidos son las placas, bóvedas y cúpulas, en edificación y las carcasas de todo tipo en máquinas y motores.

1.4. CONDICIONES DE EQUILIBRIO

Como es conocido, un cuerpo se encuentra en equilibrio cuando todos sus puntos se mueven con velocidad uniforme; si esta velocidad es nula se dice que el cuerpo está en reposo.

Las condiciones de equilibrio de un sólido sometido a una serie de cargas son que la resultante de las mismas, \vec{R} , y el momento resultante, respecto de un punto cualquiera, \vec{M} , sean nulas, es decir:

$$\begin{aligned} \sum R_x = 0 & \quad ; \quad \sum R_y = 0 & \quad ; \quad \sum R_z = 0 \\ \sum M_x = 0 & \quad ; \quad \sum M_y = 0 & \quad ; \quad \sum M_z = 0 \end{aligned} \quad [1.1]^*$$

Cuando las cargas están contenidas en un plano (por ejemplo el plano x- y) las seis ecuaciones anteriores se reducen a tres:

$$\sum R_x = 0 \quad ; \quad \sum R_y = 0 \quad ; \quad \sum M_z = 0 \quad [1.2]^*$$

Estas condiciones, necesarias y suficientes para los sólidos rígidos que estudia la Mecánica, son insuficientes para los sólidos deformables considerados en Elasticidad y en Resistencia de Materiales, puesto que en estos últimos debe existir, además, equilibrio entre las cargas exteriores y los esfuerzos internos o tensiones, como, por ejemplo, las que actúan sobre la superficie S, sustituyendo a la parte B del prisma mecánico representado en la figura 1.3, suponiendo se corte el mismo por dicha sección, conservando la parte A.

Por tanto, en los sólidos deformables deben cumplirse tanto las condiciones generales de equilibrio (equilibrio estático) como las que corresponden al proceso de deformación al que han sido sometidos (equilibrio elástico).

Si el cuerpo en estudio no cumpliera las condiciones [1.1] o [1.2], es decir, si no está en equilibrio, se introducen convencionalmente las fuerzas de inercia para restituir el mismo, de acuerdo con el principio de D'Alembert.

1.5. FORMAS DE TRABAJO EN LAS SECCIONES DE UNA BARRA PRISMÁTICA

Consideraremos la barra prismática representada en la figura 1.3, donde hemos considerado que la sección ideal S divide la barra en dos partes A y B.

² Las ecuaciones [1.1] y [1.2] son generales, incluyendo, por tanto, las condiciones de equilibrio en varios puntos o secciones del sólido.

En la sección S hemos considerado un sistema de ejes coordenados, cuyo origen es el centro de gravedad de la sección, O ; el eje Ox es tangente al eje o directriz de la barra, estando contenidos los ejes Oy y Oz en el plano de la sección (habitualmente coincidirán con los ejes principales de inercia de la sección).

Estudiamos el equilibrio de la parte A de la barra cuando se suprime la parte B de la misma sustituyéndola por la resultante \bar{R} y el momento resultante \bar{M} de las fuerzas aplicadas y reacciones que actúan en dicha parte B (figura 1.4.).

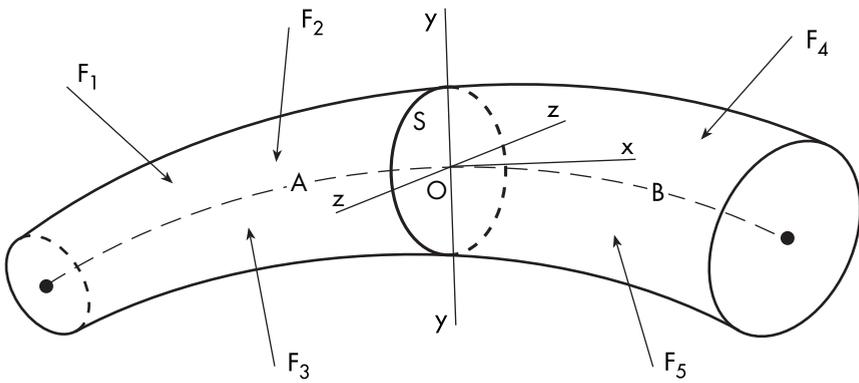


Figura 1.3

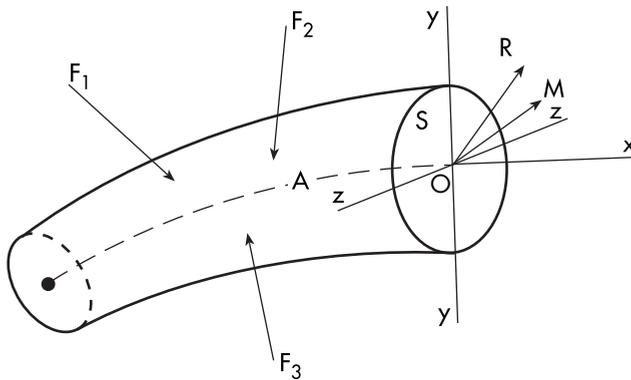


Figura 1.4

Ya que tanto la resultante \vec{R} como el momento resultante \vec{M} tienen, en general, componentes según los tres ejes coordenados, pueden existir hasta seis sollicitaciones distintas sobre la sección S. Haciendo sucesivamente distintas de cero las componentes de la resultante y del momento resultante obtenemos, en principio, seis formas distintas de trabajo que, como veremos, se reducen a cuatro.

$$1.^{\circ}) \quad \vec{M} = 0 \quad ; \quad \vec{R} = N\vec{i} \quad \text{[Figura 1.5]} \quad [1.3]$$

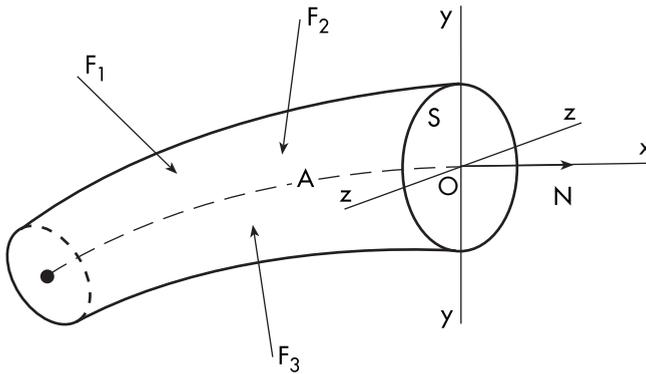


Figura 1.5

En este caso el prisma mecánico está sometido, en la sección S a esfuerzo longitudinal N que será de tracción cuando tienda a separar dicha sección de la infinitamente próxima y de compresión en caso contrario. Como veremos más adelante el esfuerzo longitudinal origina tensiones normales σ y deformaciones longitudinales ϵ .

$$2.^{\circ}) \quad \vec{M} = 0 \quad ; \quad \vec{R} = C_y\vec{j} \quad \text{[Figura 1.6]} \quad [1.4]$$

En este caso se dice que la pieza, en la sección considerada está sometida a esfuerzo cortante dirigido según el eje y: en esa dirección tiende a deslizarse (cortarse) la sección S respecto de la infinitamente próxima.

$$3.^{\circ}) \quad \vec{M} = 0 \quad ; \quad \vec{R} = C_z\vec{k} \quad \text{[Figura 1.7]} \quad [1.5]$$

Análogamente al caso anterior, puede decirse que la sollicitación es de esfuerzo cortante en la dirección del eje z.