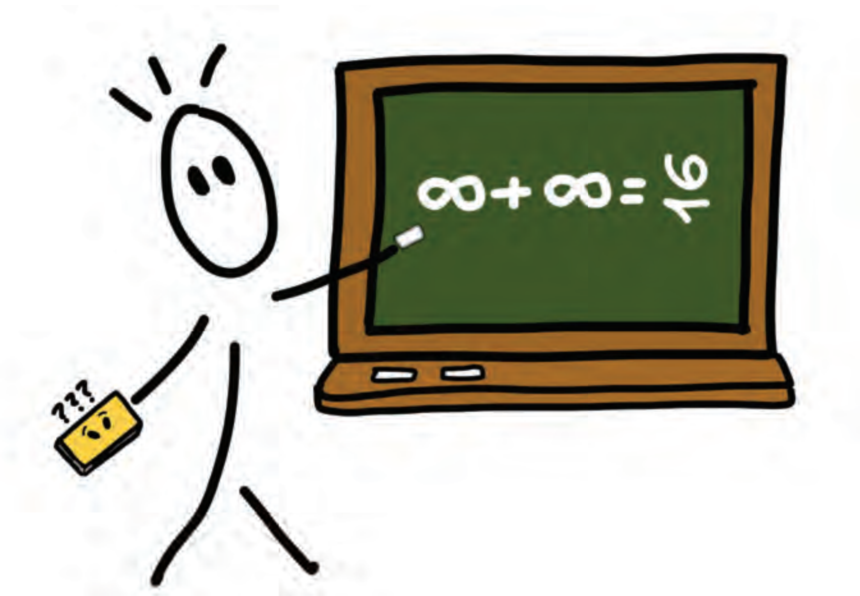
ÍNDICE GENERAL

TEMA I

REPASO, NOTACIONES Y TERMINOLOGÍA.



Introducción. Guion–esquema del tema I.

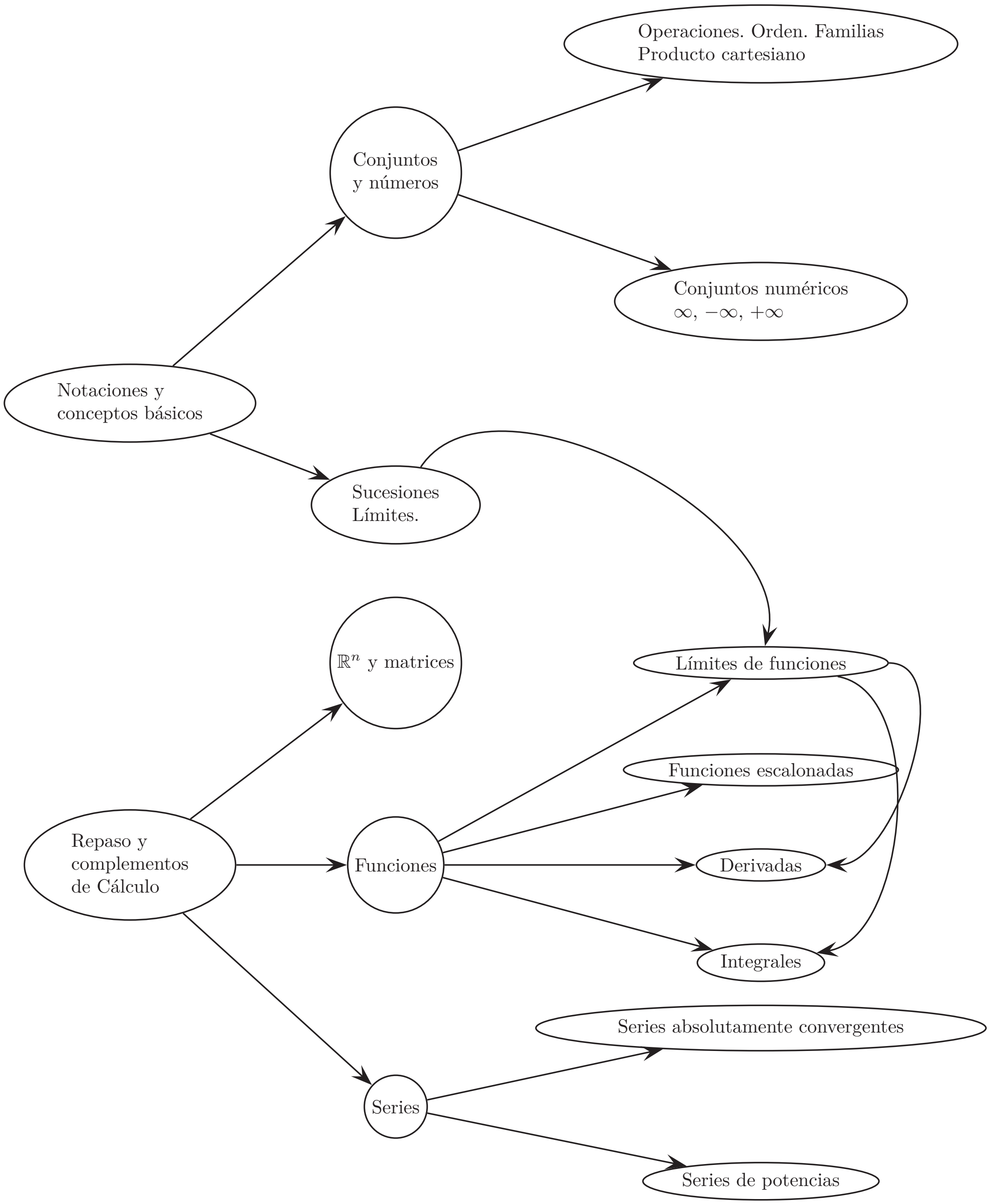
Este primer tema consta de dos bloques. En el primero, se revisan las notaciones y los conceptos básicos de las matemáticas, con el fin, no solo de ayudar al estudiante a recordar esas nociones, sino con el ánimo de fijar una notación y una terminología, que puede variar de uno a otro manual. El segundo bloque presenta un revisión del los conceptos elementales del cálculo infinitesimal estudiados en cursos anteriores (funciones, límites, derivadas, integrales, series, etc.)

En sentido estricto, los contenidos de este primer tema son anteriores a los correspondientes a *Ampliación de Cálculo*, pero, aunque el tiempo que lleve estudiarlo no debería incluirse en las 150 horas que se deben dedicar a la asignatura, es muy recomendable estudiar el Tema 1 antes de seguir con el resto de los temas.

Objetivos del Tema I.

- Que el estudiante revise los conceptos matemáticos más elementales.
- Que el estudiante interiorice las notaciones y la terminología que se van a utilizar en el resto del libro.
- Promover la reflexión sobre los conceptos de cálculo infinitesimal estudiados en años anteriores, para que, contemplándolos a cierta distancia, sin preocuparse de las demostraciones detalladas, se llegue a asimilar su sentido profundo.
- Introducir unos cuantos conceptos muy básicos que no siempre se incluyen en los cursos elementales (por ejemplo, las funciones escalonadas).

Guion – esquema del Tema I. Palabras clave.



1. NOTACIONES Y CONCEPTOS BÁSICOS.

1.1. Conjuntos.

La expresión $b \in A$, significa que b pertenece a A, es decir, que b es un elemento de A. El símbolo tachado, $\notin$, significa «no pertenece». Este criterio de «tachar para negar» se extiende al resto de los símbolos que veremos para denotar relaciones. No hay que complicarse la vida intentando definir qué es un conjunto y qué es un elemento. Más bien, hay que pensar que la relación de pertenencia, «$\in$», es el concepto básico. El conjunto que no tiene elementos se llama *conjunto vacío*, $\emptyset$. Solo hay un conjunto vacío.

Las *llaves*, $\{\dots\}$, determinan conjuntos. Los elementos se pueden enumerar o determinar por una condición. En el segundo caso, hay que referir la condición a un conjunto prefijado.

Ejemplo 1.
- $b \in \{a, b\}, \quad a \in \{a\}, \quad \{a, b\} = \{b, a\}$.
- $\{x \in \{a, b, u\} : x \text{ está denotado por una vocal}\} = \{a, u\}$
- $A = \{B : B \text{ tiene más de un elemento}\}$ no está bien formado, porque no se fija el conjunto al que se refiere la condición. $\blacksquare$

Se dice que A es un *subconjunto* de B, escrito como $A \subset B$, o también, como $A \subseteq B$, si todos los elementos de A son elementos de B. Cuando se fija mentalmente un conjunto, se suelen emplear las letras mayúsculas para denotarlo a él y a sus subconjuntos, mientras que las minúsculas se emplean para los elementos de ese conjunto fijado.

Ejemplo 2. $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}, \ \{a\} \subset \{a, b\}, a \in \{a, b\}, \ \emptyset \subset A, \quad A \subset A \quad \blacksquare$.

1.2. Orden en un conjunto.

El símbolo «$<$» se lee «menor que» o «estrictamente menor que», concepto que se caracteriza por dos propiedades básicas: i) ningún elemento es estrictamente menor que sí mismo, ii) si un elemento es menor que otro y éste es menor que un tercero, entonces el primero es menor que el tercero.

Decimos que un orden es *total* en el conjunto dado, cuando cualesquiera dos de sus elementos están relacionados (uno es menor que el otro); en otro caso, se dice que el orden es *parcial*. En estas notas, al hablar de orden, nos referiremos a un orden total, salvo que se indique lo contrario.

El símbolo «$\leq$» se lee «menor o igual que», y significa precisamente eso.

Ejemplos: Las palabras están totalmente ordenadas alfabéticamente. La relación «ser descendiente de» es de orden parcial entre las personas de un país.

1.3. Conjuntos de números.

LOS NÚMEROS NATURALES, $\mathbb{N}$: $0, 1, 2, 3 \ldots$

- Sumar; multiplicar; orden ($0 < 1 < 2 < 3 \ldots$).
- La resta y la división son operaciones parciales: Solo se puede restar o dividir dos naturales para obtener otro natural en ciertos casos. Ejemplo: $3 - 4$ no es un número natural.
- Un conjunto A es *infinito* si tiene infinitos elementos, es decir, si a cada número natural se le puede asignar un elemento diferente de A. Los conjuntos que no son infinitos se denominan *finitos*.
- Un conjunto es *numerable* si a cada uno de sus elementos se le puede asignar un número natural diferente, es decir, si se pueden enumerar sus elementos. Obviamente, $\mathbb{N}$ es infinito numerable. A veces, se reserva la palabra *numerable* para los *infinitos numerables*.

LOS NÚMEROS ENTEROS, $\mathbb{Z}$: $0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots$

- Sumar; *restar*; multiplicar; orden ($\ldots < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 \ldots$).
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. La división de enteros es solo una operación parcial. Por ejemplo, $3/2$ no es un número entero.
- $\mathbb{Z}$ es un conjunto numerable (aunque los enteros se enumeran en un orden diferente del suyo: $0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots$).

LOS NÚMEROS RACIONALES, $\mathbb{Q}$. Los que se pueden expresar como el cociente de dos enteros, p/q, con $q \neq 0$. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

- Sumar; restar; multiplicar; *dividir*; orden (*cuerpo ordenado*). Es *cuerpo*, porque dentro de él se puede sumar, restar, multiplicar y dividir, salvo entre 0, con las propiedades que conocemos; es *cuerpo ordenado* porque, además, tiene un orden total compatible con sus operaciones ($a + c \leq b + c$ siempre que $a \leq b$; $ab \geq 0$, siempre que $a \geq 0, b \geq 0$).

- $\mathbb{Q}$ es un conjunto numerable (aunque los racionales se enumeran en un orden diferente del suyo).

- En forma decimal, los números racionales son los que se expresan mediante un desarrollo periódico (puro o mixto). Ejemplos:
$-\dfrac{1}{3} = -0.\widehat{3}$, $\dfrac{64}{30} = 2.1\widehat{3}$, $5 = 5.\widehat{0} = 4.\widehat{9}$, $\dfrac{34}{99} = 0.\widehat{34} = 0.3\widehat{43}$, $\dfrac{5}{2} = 2.5 = 2.5\widehat{0}$.

LOS NÚMEROS REALES, $\mathbb{R}$: corresponden a todos los posibles desarrollos decimales, es decir, tienen un número entero como parte entera y cualquier secuencia de los dígitos $0, \ldots, 9$ como parte decimal. El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales se visualiza como una recta; de hecho, se le suele denominar *recta real* y a los números reales, *puntos* de la recta. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

- Sumar; restar; multiplicar; *dividir*; orden (*cuerpo ordenado*).

- Se suele denotar: $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$.

- Los números reales que no son racionales se llaman *irracionales*.

  Ejemplo de número irracional (cualquiera cuyo desarrollo decimal no tenga parte periódica): $1.010010001000010000001\cdots$

- $\mathbb{R}$ *no* es un conjunto numerable.

- *Intervalo cerrado*: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$. *Intervalo abierto*: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$. También se puede poner $]a, b[$ para el intervalo abierto, pero se emplea poco. Se definen de manera evidente los intervalos abiertos por un extremo y cerrados por el otro $]a, b] = (a, b]$, $[a, b[= [a, b)$.

- *Aproximación de números reales:* Cualquier intervalo abierto de $\mathbb{R}$ contiene infinitos irracionales e infinitos racionales.

- *Supremo e ínfimo*: Un elemento c de un conjunto ordenado E es una *cota superior* de un subconjunto $A \subset E$ si $c \geq a$ para todo $a \in A$. Decimos que $d \in E$ es una *cota inferior* de $A \subset E$ si $d \leq a$ para todo $a \in A$. La menor de las cotas superiores de A se denomina *supremo* de A y se denota por $\sup A$. La mayor de las cotas inferiores de A se denomina *ínfimo* de A y se denota por $\inf A$.

- Completitud del orden de $\mathbb{R}$: Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ que tenga cota superior, tiene supremo; todo subconjunto de $\mathbb{R}$ que tenga cota inferior, tiene ínfimo.

  Observemos que $\mathbb{Q}$ no es completo (ésta, junto con la numerabilidad de $\mathbb{Q}$, son las principales diferencias entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$).

Ejemplo 3. El conjunto $A = \{1, 1.01, 1.01001, 1.010010001, \dots\}$, que está formado por infinitos racionales, tiene cotas superiores (por ejemplo, 2), pero no tiene supremo en $\mathbb{Q}$. El supremo de A en $\mathbb{R}$ es el irracional $\sup A = 1.01001000100001\dots$

Si se quiere ser más riguroso, el conjunto $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ se puede definir por inducción: $a_1 = 1, a_k = a_{k-1} + 10^{1-\frac{k(k+1)}{2}}$, para $k > 1$. ■

1.4. Funciones y familias.

Una *función* o *aplicación* $f\colon X \rightarrowtail Y$ es una regla que asigna a cada elemento de su *dominio*, que es un cierto subconjunto $\operatorname{dom} f$ del conjunto inicial X, un solo elemento del conjunto final Y (si permitimos que asigne más de uno, la denominamos *multifunción*). Cuando escribamos $f\colon X \to Y$, en vez de $f\colon X \rightarrowtail Y$, queremos señalar que el dominio de f es todo X, o sea, $\operatorname{dom} f = X$. La *imagen* de un subconjunto $A \subset X$ mediante una función $f\colon X \rightarrowtail Y$ es el subconjunto de Y dado por $f(A) = \{y \in Y : y = f(x)$, para algún $x \in A \cap \operatorname{dom} f\}$. La imagen, $f(X)$, del dominio de f se denomina *recorrido* de f.

Recíprocamente, la *imagen inversa* de un subconjunto $B \subset Y$ es el subconjunto de X dado por $f^{-1}(B) = \{x \in \operatorname{dom} f\colon f(x) \in B\}$. Observemos que, en general, f^{-1} *no* es una función de $Y \rightarrowtail X$ (es una multifunción); cuando $f^{-1}\colon Y \rightarrowtail X$ es una función, decimos f es *inyectiva*. Si, además, $f(X) = Y$, entonces se dice que f es *biyectiva*, en cuyo caso, obviamente $f^{-1}\colon Y \to X$ también es biyectiva.

Cuando no se indica explícitamente el dominio, se entiende que es el mayor subconjunto del conjunto inicial para el que la expresión tiene sentido.

Cuando no se considera en el conjunto inicial I de una función $f\colon I \to X$ ninguna estructura, las funciones se suelen denominar *familias* y, en lugar de escribir $a(j)$, se suele poner a_j para $j \in I$. El concepto de familia es similar al de conjunto, salvo que los elementos de la familia están indexados (etiquetados, podríamos decir) respecto del conjunto de índices I. Si $(a_j)_{j\in I}$ es una familia de elementos de un cierto conjunto A, con índices en el conjunto I y $J \subset I$, entonces $(a_j)_{j\in J}$ es una *subfamilia* de $(a_j)_{j\in I}$.

Ejemplo 4. Si A_x es el conjunto de las personas que miden más de x centímetros, entonces $(A_x)_{x\in\mathbb{R}}$ es una familia de conjuntos de personas y $(A_x)_{x\in\mathbb{N}}$ es una subfamilia de la anterior. ■

- Cuando el conjunto de índices es $I = \{1, 2\}$, la familia se denomina par ordenado y se denota por (a_1, a_2). Desgraciadamente la notación coincide con la del intervalo abierto;

se distingue por el contexto. Observe la diferencia entre *conjunto de dos elementos* y *par ordenado*: mientras que $\{a, b\} = \{b, a\}$, tenemos $(a, b) \neq (b, a)$, siempre que $a \neq b$. Además, $\{a, a\} = \{a\}$, mientras que $(a, a) \neq \{a\}$.

- De forma más general, cuando el conjunto de índices es $I = \{1, 2 \ldots, n\}$, la familia se denomina *n-tupla ordenada*: por ejemplo (a_1, a_2, a_3), es una *terna ordenada*, (a_1, a_2, a_3, a_4) es una *cuaterna ordenada*, etc.

1.5. Producto cartesiano.

El conjunto cuyos elementos son los pares ordenados (a_1, a_2) con $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$ es el producto cartesiano $A_1 \times A_2$. El producto cartesiano de un conjunto por sí mismo se denota por $A^2 = A \times A$. Análogamente, con más factores, así $A_1 \times A_2 \times A_3$ es el conjunto formado por las ternas de la forma (a_1, a_2, a_3) con $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, a_3 \in A_3$ o, con n factores, $A^n = A \times \cdots \times A$, es el conjunto formado por las n-túplas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, con $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$. Una n–tupla no es más que una ristra de n números.

Ejemplo 5.

- $\{a, b\} \times \{a, b, c\} = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c)\}$.
- $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$.
- $[1, 5] \times [-2, 7) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 5, -2 \leq y < 7\}$.
- $[1, 5]^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x \leq 5, 1 \leq y \leq 5, 1 \leq z \leq 5\}$. $\blacksquare$

1.6. Operaciones con familias.

Las operaciones (ya sean de conjuntos o de números), definidas inicialmente para dos objetos, frecuentemente se pueden extender a familias mayores:

- UNIÓN de una familia de conjuntos, $\cup_{i \in I} A_i$, es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a alguno de los conjuntos A_i. Por supuesto, cuando se unen dos conjuntos se pone $A \cup B$, si son tres $A \cup B \cup C$, etc.

- INTERSECCIÓN de una familia de conjuntos, $\cap_{i \in I} A_i$, es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a todos los conjuntos A_i. La intersección de dos conjuntos se denota por $A \cap B$, la de tres por $A \cap B \cap C$, etc.

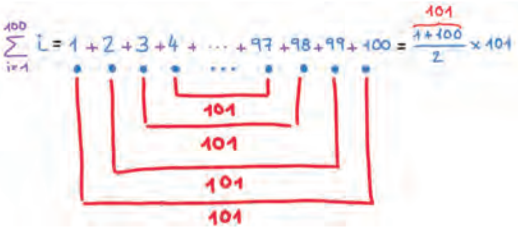


Figura 1. Suma de los términos de un progresión aritmética.

- COMPLEMENTARIO RELATIVO de B EN A, denotado $A \setminus B$: es el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B. Cuando el conjunto A se da por sobreentendido y $B \subset A$, se puede escribir B^c en vez de $A \setminus B$.

  Cuando $A, B \subset \mathbb{R}$, se suele denotar por $A - B$ al conjunto $A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$, ¡no se debe confundir con $A \setminus B$!

  Por ejemplo: $\{1, 2, 5\} \setminus \{1, 2\} = \{5\}$, mientras que $\{1, 2, 5\} - \{1, 2\} = \{0, -1, 1, 4, 3\}$.

La suma de los elementos de una familia de números, con un conjunto de índices I finito, se denota por $\sum_{i \in I} a_i$. En particular, si $I = \{1, 2, \ldots, m\}$, la suma se escribe como $\sum_{i=1}^{m} a_i = a_1 + \cdots + a_m$. Para el producto: $\prod_{i \in I} a_i = \prod_{i=1}^{m} a_n = a_1 a_2 \cdots a_m$.

Ejemplo 6. Veamos algunas expresiones con sumatorios que debemos conocer:

- Si $a_j = a_0 + kj$, entonces $\sum_{j=j_0}^{j_1} a_j = \frac{a_{j_0} + a_{j_1}}{2}(j_1 - j_0 + 1)$.

  Suma progresión aritmética: $\dfrac{\text{El primero más el último}}{\text{dos}} \times n^o$ de sumandos

- Si $b_j = b_0 r^j$, con $r \neq 1$, entonces $\sum_{j=j_0}^{j_1} b_j = \frac{b_{j_0} - b_{j_1+1}}{1-r}$.

  Suma progresión geométrica: $\dfrac{\text{El primero menos el siguiente del último}}{\text{uno menos la razón}}$

- $m! = \prod_{j=1}^{m} j$, *factorial* de $m \in \mathbb{N}$. También se define $0! = 1$.

- $\displaystyle\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{\prod_{j=m-k+1}^{m} j}{k!}$. *Número combinatorio*.

- $\displaystyle(a + b)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^k b^{m-k}$. *Binomio de Newton*. ■

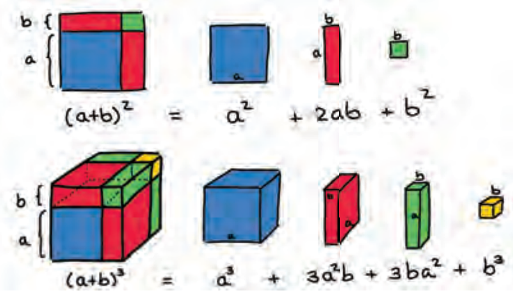


Figura 2. Interpretación geométrica del binomio de Newton para $a, b > 0$, $n = 2, 3$.

1.7. Sucesiones.

Una *sucesión* en un conjunto X, o sucesión de puntos de X, es un tipo particular de función, $b : \mathbb{N} \rightarrowtail X$, con dominio infinito. Aquí X puede ser cualquier conjunto: si $X = \mathbb{R}$, tendremos una sucesión de números reales, si $X = \mathbb{R}^3$, tendremos una sucesión de puntos del espacio, si X está formado por rectas, tendremos una sucesión de rectas, etc.

Se suele emplear la letra n para denotar al índice o variable de una sucesión, pero nosotros procuraremos evitarlo cuando pueda crear confusión, porque la letra n se suele reservar para la dimensión del espacio ambiente.

Para referirnos a las sucesiones, podemos emplear la notación típica de las funciones, por ejemplo, $b(k) = 3k + 1$ o la notación de subíndice o superíndice, por ejemplo $b_k = 3k + 1$, o $b^k = 3k + 1$ (esta última la emplearemos poco, porque se puede confundir con una potencia, pero en otras asignaturas será frecuente). Sea trata de la misma sucesión en los tres casos. Hay que acostumbrarse a las tres notaciones, incluso combinadas en una sola expresión. Como el resto de las funciones, lo más correcto es denotar a las sucesiones con una letra, aunque muy frecuentemente, como también ocurre con las funciones, se hace referencia a la variable. Por ejemplo, se debería poner «la sucesión b», «la función f», pero se admite «la sucesión b_k», «la función $f(x)$».

La restricción de una sucesión $b : \mathbb{N} \rightarrowtail X$ a un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ se denomina *subsucesión* de b. Por ejemplo, si $b : \mathbb{N} \to X$ es una sucesión y denotamos por $P \subset \mathbb{N}$ al subconjunto de los números pares, entonces $b|_P$ es la subsucesión de b formada por los términos de índice par. Normalmente, relajando un poco la notación, se pone «la sucesión b_k», «la subsucesión b_{2k}».

Una sucesión $(b_j)_{j \in I}$ de un conjunto ordenado es *creciente* si $b_j \leq b_{j+1}$ para todo $j \in I$. Análogamente, $(b_j)_{j \in I}$ es *decreciente*, si $b_j \geq b_{j+1}$ para todo $j \in I$. Las sucesiones crecientes y las decrecientes se denominan genéricamente *monótonas*.

Una propiedad muy importante de las sucesiones de un conjunto ordenado es que de cualquiera de ellas se puede extraer un subsucesión monótona.

1.8. Puntos del infinito.

Se trata de dos nuevos puntos que se *añaden* a la recta real $\mathbb{R}$, de forma que $\inf \mathbb{R} = -\infty$ y $\sup \mathbb{R} = +\infty$. La recta extendida así obtenida se denota por $[-\infty, +\infty]$ y se puede visualizar como un intervalo cerrado. Cuando esos dos puntos se identifican como uno solo, ese nuevo punto se denota por ∞. La recta real extendida por un solo punto $(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ se visualiza como una circunferencia, que se denota por $\overline{\mathbb{R}}$ (figura 3).

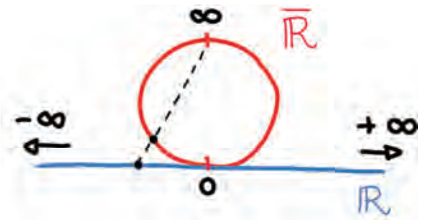


Figura 3. La recta ampliada por dos puntos, $[-\infty, +\infty]$, y la recta ampliada por un punto, $\overline{\mathbb{R}}$.

Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ tiene supremo e ínfimo en $[-\infty, +\infty]$. Observemos que el ínfimo del conjunto vacío en $[-\infty, +\infty]$ es $\inf \emptyset = +\infty$, pues todos los elementos son cotas inferiores del vacío. Así mismo, $\sup \emptyset = -\infty$. En la recta extendida por dos puntos, es decir, en $[-\infty, +\infty]$, se pueden considerar intervalos con extremos $-\infty$ o $+\infty$. Por ejemplo $(1, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$. Este tipo de intervalo se denomina *semirrecta* o *intervalo no acotado*. En lo que sigue, salvo que se especifique otra cosa, el término «intervalo», a secas, se reservará para los *intervalos acotados*, es decir, para aquellos cuyos extremos sean números reales.

Cuando no hay confusión posible, frecuentemente se pone ∞, en vez de $+\infty$, para relajar la notación.

1.9. Límites de sucesiones y de funciones.

Definir una *noción de límite* en un conjunto X consiste en elegir un conjunto de sucesiones de X (que se denominarán *convergentes* en X para esa noción de límite) y asignar a cada una de ellas un elemento de X (su *límite*), de manera que toda subsucesión de una sucesión convergente en X tenga el mismo límite que esta.

Para expresar que el límite de una sucesión, $(a_m)_{m\in I}$, de puntos de X es $L \in X$, o lo que es igual, que $(a_m)_{m\in I}$ *tiende* a L o que $(a_m)_{m\in I}$ *converge a* L *en* X, se escribe indistintamente $\lim\limits_{m\to\infty} a_m = L$, $\lim a_m = L$ o, incluso, $a_m \to L$.

Si tenemos sendas nociones de límite en los conjuntos X e Y, una función $f\colon X \rightarrowtail Y$ y un conjunto $M \subset \operatorname{dom} f$, decimos que $\lim\limits_{x\in M, x\to x_0} f(x) = L$ cuando $\lim\limits_{m\to\infty} f(b_m) = L$, para toda sucesión $b : \mathbb{N} \rightarrowtail M \setminus \{x_0\}$ con límite x_0.

Si no existen sucesiones b como la de arriba, ni se plantea la existencia del límite. Cuando $M = \operatorname{dom} f$, no se escribe, se sobrentiende.

Si $x_0 \in \operatorname{dom} f$ y $\lim\limits_{x\in M, x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, decimos que f es *continua* en x_0.

Nota 1. Comentario para el instructor. Una noción de límite define una topología en X, en la que los cerrados son los conjuntos que contienen a los límites de todas las sucesiones convergentes de su sus puntos. Cuando nuestra noción de límite coincide con la correspondiente a esa topología, decimos que se trata de una noción de límite *topológica*. En este caso, nuestras definiciones de límite y de continuidad coinciden con las habituales, para los espacios métricos y sus cocientes (espacios topológicos secuenciales). ■

Consideramos en $X = [-\infty, +\infty]$ (y, por lo tanto, también en $\overline{\mathbb{R}}$) la siguiente noción de limite: una sucesión tiene límite si y solo si los supremos de todas sus subsucesiones crecientes coinciden con los ínfimos de todas sus subsucesiones decrecientes; ese valor común es el límite de la sucesión.

Esta noción de límite en $X = [-\infty, +\infty]$, que coincide con la estudiada en cursos anteriores, se puede expresar, de manera equivalente, desdoblándola en dos partes:

- Las sucesiones crecientes tienden a su supremo y las decrecientes, a su ínfimo.
- Una sucesión tiende a L si y solo si todas sus sucesiones monótonas tienden a L.

Los procedimientos para calcular límites de sucesiones y de funciones manualmente no tienen demasiado interés, pero *comprender* el concepto de límite es esencial para asimilar multitud de conceptos matemáticos y científico-tecnológicos.

Ejemplo 7. Estudiemos si existe el límite de la sucesión de números reales $a_k = (-1)^k$ es convergente. Si lo fuera, el límite de la subsucesión creciente $a_{2k} = 1$ sería $\sup_k a_{2k} = 1$. Pero ese límite tendría que coincidir con el de la subsucesión decreciente $a_{2k+1} = -1$, que es $\inf_k a_{2k+1} = -1$. Como $1 \neq -1$, la sucesión $a_k = (-1)^k$ no tiene límite (no es convergente en $\mathbb{R}$ ni en $\overline{\mathbb{R}}$ ni en $[-\infty, +\infty]$). ■

Ejemplo 8. La sucesión $a_k = k$ es creciente, luego su límite coincide con su supremo $\lim_{k\to\infty} a_k = \sup_k a_k = +\infty$. Es una sucesión convergente en $[-\infty, +\infty]$ (y también en $\overline{\mathbb{R}}$), pero no es una sucesión convergente en $\mathbb{R}$, porque $+\infty \notin \mathbb{R}$. ■

Ejemplo 9. La sucesión $a_k = (-k)^k$ no es creciente ni decreciente. Sin embargo, la subsucesión (a_{2k}) es creciente, por lo que

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \sup_{k\in\mathbb{N}}(-2k)^{2k} = \sup_{k\in\mathbb{N}}(2k)^{2k} = +\infty,$$

mientras que (a_{2k+1}) es decreciente, con lo que,

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \sup_{k\in\mathbb{N}}(-2k-1)^{2k+1} = \sup_{k\in\mathbb{N}} -(2k+1)^{2k+1} = -\infty.$$

Por lo tanto, la sucesión (a_k) no tiene límite ni en $\mathbb{R}$ ni en $[-\infty, +\infty]$.

No obstante, observemos que toda subsucesión creciente de (a_k) tiene supremo $+\infty$ y que toda subsucesión decreciente de (a_k) tiene ínfimo $-\infty$. Por lo tanto, el límite de (a_k) en $\overline{\mathbb{R}}$ es ∞. Por eso, es correcto poner $\lim_{k\to\infty} a_k = \infty$ o, lo que es igual, $a_k \to \infty$. ■

1.10. Operaciones con los puntos del infinito.

Los puntos del infinito, $-\infty, +\infty, \infty$ no son números reales, pero se les pueden aplicar ciertas operaciones propias de los reales. Si «$*$» representa un operación con reales y a, b son puntos reales o de infinito, el criterio para decidir si $a * b$ está definido y cuál es su valor, es el siguiente: $a * b = \lim a_m * b_m$ si el límite es siempre el mismo para todas las sucesiones a_m y b_m que cumplan $a_m \to a, b_m \to b$.

Nota 2. Comentario para el instructor. Para operar con $+\infty, -\infty$, las operaciones de $\mathbb{R}$ se extienden a $X = [-\infty, +\infty]$ manteniendo la continuidad de $X \times X \to X$. Para operar con ∞, las operaciones de $\mathbb{R}$ se extienden a $\overline{\mathbb{R}}$ manteniendo, también, la continuidad de $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$. ■

Ejemplo 10.

- $a + \infty = \infty,\ a + (+\infty) = +\infty,\ a + (-\infty) = -\infty$, para todo $a \in \mathbb{R}$.
- $0 \cdot \infty$ no está definida. Por ejemplo: $a_m = 1/m^2 \to 0, b_m = m^2 \to \infty, a_m b_m = 1 \to 1$, pero $a_m = 2/m^2 \to 0, b_m = m^2 \to \infty, a_m b_m = 2 \to 2$.
- $\dfrac{1}{\infty} = 0,\ \dfrac{1}{0} = \infty$, pero $\dfrac{1}{0}$ no estaría definida en $[-\infty, +\infty]$.
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, pero $\infty + \infty$ no está definida.
- $2^{+\infty} = +\infty, \quad 2^{-\infty} = 0$, pero 2^{∞} no está definida.
- $\dfrac{\infty}{\infty}, \quad \dfrac{0}{0}$ no están definidas. ■

CONTESTE AHORA AL CUESTIONARIO 1.

2. REPASO Y COMPLEMENTOS DE CÁLCULO.

2.1. El espacio $\mathbb{R}^n$.

El producto cartesiano de n factores iguales a $\mathbb{R}$ se denota por $\mathbb{R}^n$, es decir: $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de pares ordenados de números reales, (x_1, x_2), (que se puede visualizar como un plano, en el que cada par representa las coordenadas de un punto); $\mathbb{R}^3$ es el conjunto de ternas ordenadas de números reales (x_1, x_2, x_3) (que se puede visualizar como el espacio tridimensional); y, en general, $\mathbb{R}^n$ es el conjunto de *n–tuplas* ordenadas de números reales $(x_1, x_2 \dots, x_n)$. ¡No hay ninguna necesidad de *visualizar* $\mathbb{R}^n$! La interpretación espacial de los espacios de coordenadas tiene su importancia histórica, pero en la mayor parte de las aplicaciones de los espacios $\mathbb{R}^n$, no se da esa identificación: una n–tupla es simplemente una ristra de n objetos, números, en este caso.

Al símbolo $\mathbb{R}^n$ se refiere a algo más que al producto cartesiano de n copias de $\mathbb{R}$: igual que el símbolo $\mathbb{R}$ lleva implícito sus operaciones, también el símbolo $\mathbb{R}^n$ incluye las suyas: si $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$, $\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$ (se opera componente a componente).

No vamos a definir los conceptos de *punto* y *vector*: para nosotros, puntos y vectores no son más que que interpretaciones de los elementos del espacio de coordenadas $\mathbb{R}^n$, que son simplemente n–tuplas. Pensamos en puntos como posiciones en el espacio y pensamos en vectores como direcciones. Podremos utilizar la tipografía negrita para las n-tuplas que nos interese considerar, más como vectores, que como puntos, pero es ridículo convertir las negritas (o las flechitas) en fetiches. Por otra parte, el empleo de tipografía negrita resulta útil para evitar confusiones entre las componentes de una n-tupla, denotadas con subíndices, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, y una familia de n–tuplas $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k \in \mathbb{R}^n$. Siguiendo este criterio, escribimos

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \quad \ldots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n.$$

La familia $(\mathbf{e}_j)_{j=1,\ldots,n}$ se denomina *base canónica* de $\mathbb{R}^n$. Cuando $n = 2$ o $n = 3$, a veces se pone $\mathbf{i} \equiv \mathbf{e}_1, \mathbf{j} \equiv \mathbf{e}_2, \mathbf{k} \equiv \mathbf{e}_3$, notación inspirada en los cuaterniones. Independientemente de que empleemos o no tipografía negrita, denotaremos

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j, \text{ para } x \in \mathbb{R}^n.$$

La x que no lleva subíndices puede ir o no ir en negrita (no cambia el significado), pero las componentes $x_j \in \mathbb{R}$ nunca irán en negrita.

En ocasiones, conviene considerar a $\mathbb{R}^n$ como un subespacio de $\mathbb{R}^{n+1}$. Con este fin, *fijamos* una inclusión $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mediante la identificación $(x_1, \ldots, x_n) \approx (x_1, \ldots, x_n, 0)$. Se fija *esa* identificación y no cualquiera otra de las posibles. Observemos que se trata del criterio que se ha seguido implícitamente con la notación de las $\mathbf{e}_j$. Por ejemplo, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ en $\mathbb{R}^2$, y también $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ en $\mathbb{R}^3$.

El producto cartesiano de dos intervalos unidimensionales, $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, se denomina *intervalo bidimensional*. No todos los rectángulos de $\mathbb{R}^2$ son intervalos bidimensionales (figura 4). Se denomina *intervalo n-dimensional* o *intervalo de* $\mathbb{R}^n$ al producto cartesiano de n intervalos unidimensionales,

$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \{(x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, \text{ para } 1 \leq i \leq n\}. \quad (1)$$

De manera análoga, se definen los *intervalos n dimensionales abiertos* $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ y *semiabiertos* $[a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n)$.

2.2. Matrices.

Una familia cuyo conjunto de índices está formado por pares ordenados se denomina *matriz*. La matriz $A = (a_{ij})$, en donde $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ se suele representar como una tabla (en este manual se escribe entre corchetes) y diremos que tiene n filas y m columnas, o que es de orden $n \times m$: