ÍNDICE GENERAL

PREFACIO. 13

Plan del libro. 13

Organización y estructura de los temas. 14

Acerca de la bibliografía. 15

Cómo utilizar el libro. El curso virtual. 16

Comentario general para el instructor. 17

Tema I. **REPASO, NOTACIONES Y TERMINOLOGÍA.** 19

Introducción. Guion–esquema del tema I. 20

1. Notaciones y conceptos básicos. 22

1.1. Conjuntos. 22

1.2. Orden en un conjunto. 22

1.3. Conjuntos de números. 23

1.4. Funciones y familias. 25

1.5. Producto cartesiano. 26

1.6. Operaciones con familias. 26

1.7. Sucesiones. 28

1.8. Puntos del infinito. 29

1.9. Límites de sucesiones y de funciones. 30

1.10. Operaciones con los puntos del infinito. 31

2. Repaso y complementos de Cálculo. 32
2.1. El espacio $\mathbb{R}^n$.. 32
2.2. Matrices. 33
2.3. Funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$. 36
2.4. Operaciones con funciones; partes positiva y negativa. 37
2.5. Límites y conceptos topológicos en $\mathbb{R}^n$. 39
2.6. Continuidad.. 40
2.7. Derivadas. 43
2.8. Series. Series absolutamente convergentes. 49
2.9. Series de potencias. 53
2.10. Funciones características y funciones escalonadas. 55
3. Repaso de integración en una dimensión. 60
3.1. Integración de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ 60
3.2. Cálculo diferencial integral intuitivo en $\mathbb{R}$. 65
Lecturas y actividades recomendadas para el tema I. 67

Tema II. **COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA.** 69
Introducción. Guion–esquema del tema II. 70
1. Repaso y complementos de álgebra. 72
1.1. Aplicaciones lineales y espacios vectoriales. 72
1.2. Aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. 74
1.3. Aplicaciones multilineales.. 78
1.4. Volumen k–dimensional en $\mathbb{R}^n$. 81
1.5. Tensores, k-formas, producto exterior, jacobiano. 83
1.6. Extensión de tensores.. 87
1.7. El caso bidimensional.. 90

1.8. El caso tridimensional. 91

2. Curvas y superficies. 95

2.1. Introducción. 95

2.2. Curvas. 97

2.3. Superficies. 101

3. Variedades. 112

Lecturas y actividades recomendadas para el tema II. 121

Tema III. **CÁLCULO DIFERENCIAL VECTORIAL.** 123

Introducción. Guion–esquema del tema III. 124

1. Campos y formas. 126

1.1. Nociones intuitivas sobre formas diferenciales. 128

1.2. Campos y formas en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$. 131

1.3. Elementos de longitud, área, superficie y volumen. 134

2. Coordenadas curvilíneas. 138

3. Diferencial de una forma. 150

3.1. Gradiente, rotacional y divergencia. 154

3.2. Gradiente, rotacional y divergencia en coordenadas curvilíneas ortogonales. 157

3.3. Propiedades de los operadores diferenciales. 161

Lecturas y actividades recomendadas para el tema III. 166

Tema IV. **INTEGRACIÓN EN VARIAS DIMENSIONES.** 167

Introducción. Guion–esquema del tema IV. 168

1. La integral en $\mathbb{R}^n$. 170

1.1. Introducción. 170

1.2. Definición del concepto de integral para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. 170

1.3. La integral en los sentidos de Riemann y de Lebesgue.. 173

1.4. Integración sobre subconjuntos. Medida. 175

1.5. Intuición y notaciones para la integral.. 176

1.6. Propiedades de la integral. 178

1.7. Funciones no integrables. Integrales que valen infinito. Valor principal de Cauchy.. 191

2. Integración sobre variedades. 198

2.1. Teorema fundamental del cálculo para formas (versión intuitiva). 205

3. Casos particulares clásicos del Teorema Fundamental del Cálculo. 207

3.1. Para intervalos de la recta real, $\mathbb{R}$. Regla de Barrow. Existencia de primitiva.. 207

3.2. Para curvas de $\mathbb{R}^2$ o de $\mathbb{R}^3$. Regla de Barrow. Existencia de potencial. . . . 208

3.3. Para superficies de $\mathbb{R}^2$ con borde. Teorema del rotacional escalar o de Green.. 212

3.4. Para superficies de $\mathbb{R}^3$ con borde. Teorema del rotacional o de Stokes. . . . 215

3.5. Para sólidos de $\mathbb{R}^3$ con borde. Teorema de la divergencia o de Gauss.. . . . 218

Lecturas y actividades recomendadas para el tema IV. 222

Tema V. **EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE LA INTEGRAL.** 223

Introducción. Guion–esquema del tema V. 224

1. Área de una región plana. 226

2. Longitud de una curva. 231

3. Área de una superficie. 234

4. Principio de Cavalieri. 235

5. Baricentro.. 242

6. Cuerpos de revolución: teoremas de Pappus-Guldin. 248

7. Funciones generalizadas. 251
8. Aplicaciones a la teoría de la probabilidad y la estadística. 257
Lecturas y actividades recomendadas para el tema V. 263

Tema VI. **NÚMEROS COMPLEJOS Y FUNCIONES COMPLEJAS.** 265
Introducción. Guion–esquema del tema VI. 266
1. Los números complejos. 269
2. El cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos. 271
2.1. Conceptos básicos. 275
2.2. El punto del infinito, $z = \infty$.. 278
3. Funciones complejas de variable compleja.. 279
3.1. Las funciones de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ como transformaciones del plano.. 280
3.2. Funciones: límites, continuidad, derivadas. 284
3.3. Extensión de funciones y series de potencias. 288
3.4. Principio de identidad. 292
3.5. Series biláteras. 292
3.6. Funciones exponencial y trigonométricas.. 294
3.7. Logaritmos y raíces enésimas. 297
Lecturas y actividades recomendadas para el tema VI. 300

Tema VII. **INTEGRACIÓN EN VARIABLE COMPLEJA.** 301
Introducción. Guion–esquema del tema 7.. 302
1. Integral curvilínea en $\mathbb{C}$. 305
2. Teorema fundamental del Cálculo. 306
3. Fórmula integral de Cauchy. 310
4. Series de Laurent y singularidades aisladas. 314

5. El teorema de los residuos.. 318

Lecturas y actividades recomendadas para el tema VII.. 325

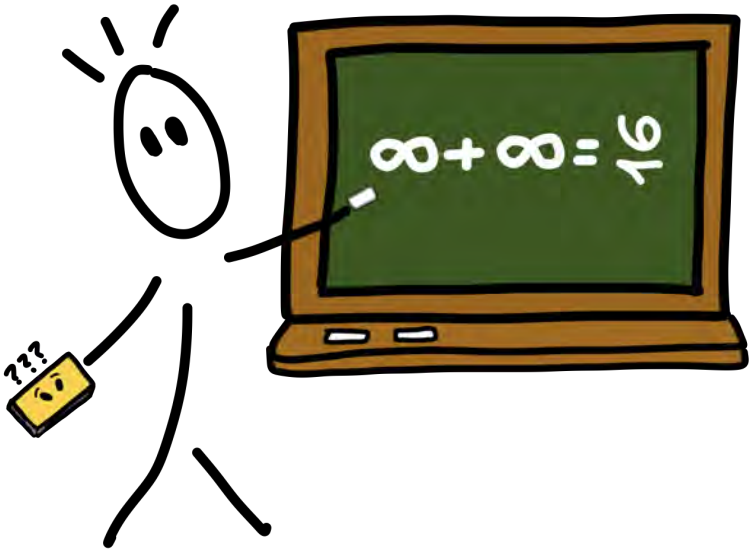
ÍNDICE ALFABÉTICO DE TÉRMINOS 327

LISTA DE SÍMBOLOS 341

BIBLIOGRAFÍA 346

TEMA I

REPASO, NOTACIONES Y TERMINOLOGÍA.



Introducción. Guion–esquema del tema I.

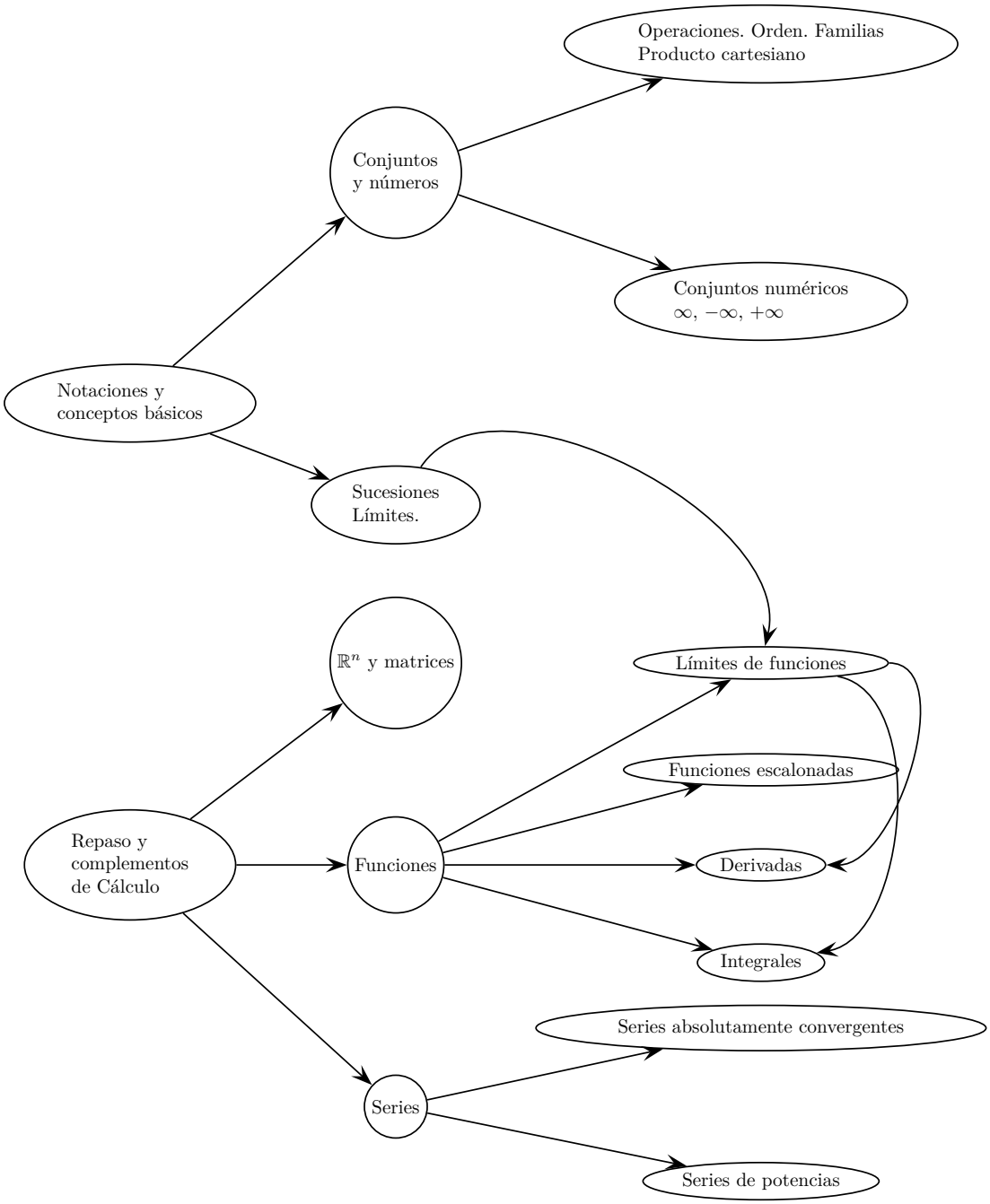
Este primer tema consta de dos bloques. En el primero, se revisan las notaciones y los conceptos básicos de las matemáticas, con el fin, no solo de ayudar al estudiante a recordar esas nociones, sino con el ánimo de fijar una notación y una terminología, que puede variar de uno a otro manual. El segundo bloque presenta un revisión del los conceptos elementales del cálculo infinitesimal estudiados en cursos anteriores (funciones, límites, derivadas, integrales, series, etc.)

En sentido estricto, los contenidos de este primer tema son anteriores a los correspondientes a *Ampliación de Cálculo*, pero, aunque el tiempo que lleve estudiarlo no debería incluirse en las 150 horas que se deben dedicar a la asignatura, es muy recomendable estudiar el Tema 1 antes de seguir con el resto de los temas.

Objetivos del Tema I.

- Que el estudiante revise los conceptos matemáticos más elementales.
- Que el estudiante interiorice las notaciones y la terminología que se van a utilizar en el resto del libro.
- Promover la reflexión sobre los conceptos de cálculo infinitesimal estudiados en años anteriores, para que, contemplándolos a cierta distancia, sin preocuparse de las demostraciones detalladas, se llegue a asimilar su sentido profundo.
- Introducir unos cuantos conceptos muy básicos que no siempre se incluyen en los cursos elementales (por ejemplo, las funciones escalonadas).

Guion – esquema del Tema I. Palabras clave.



1. NOTACIONES Y CONCEPTOS BÁSICOS.

1.1. Conjuntos.

La expresión $b \in A$, significa que b pertenece a A, es decir, que b es un elemento de A. El símbolo tachado, $\notin$, significa «no pertenece». Este criterio de «tachar para negar» se extiende al resto de los símbolos que veremos para denotar relaciones. No hay que complicarse la vida intentando definir qué es un conjunto y qué es un elemento. Más bien, hay que pensar que la relación de pertenencia, «$\in$», es el concepto básico. El conjunto que no tiene elementos se llama *conjunto vacío*, $\emptyset$. Solo hay un conjunto vacío.

Las *llaves*, $\{\dots\}$, determinan conjuntos. Los elementos se pueden enumerar o determinar por una condición. En el segundo caso, hay que referir la condición a un conjunto prefijado.

Ejemplo 1.
- $b \in \{a, b\}, \;\; a \in \{a\}, \;\; \{a, b\} = \{b, a\}$.
- $\{x \in \{a, b, u\} : x$ está denotado por una vocal$\} = \{a, u\}$
- $A = \{B : B$ tiene más de un elemento$\}$ no está bien formado, porque no se fija el conjunto al que se refiere la condición. ■

Se dice que A es un *subconjunto* de B, escrito como $A \subset B$, o también, como $A \subseteq B$, si todos los elementos de A son elementos de B. Cuando se fija mentalmente un conjunto, se suelen emplear las letras mayúsculas para denotarlo a él y a sus subconjuntos, mientras que las minúsculas se emplean para los elementos de ese conjunto fijado.

Ejemplo 2. $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}, \; \{a\} \subset \{a, b\}, a \in \{a, b\}, \; \emptyset \subset A, \;\; A \subset A$ ■.

1.2. Orden en un conjunto.

El símbolo «$<$» se lee «menor que» o «estrictamente menor que», concepto que se caracteriza por dos propiedades básicas: i) ningún elemento es estrictamente menor que sí mismo, ii) si un elemento es menor que otro y éste es menor que un tercero, entonces el primero es menor que el tercero.

Decimos que un orden es *total* en el conjunto dado, cuando cualesquiera dos de sus elementos están relacionados (uno es menor que el otro); en otro caso, se dice que el orden es *parcial*. En estas notas, al hablar de orden, nos referiremos a un orden total, salvo que se indique lo contrario.

El símbolo «$\leq$» se lee «menor o igual que», y significa precisamente eso.

Ejemplos: Las palabras están totalmente ordenadas alfabéticamente. La relación «ser descendiente de» es de orden parcial entre las personas de un país.

1.3. Conjuntos de números.

LOS NÚMEROS NATURALES, $\mathbb{N}$: $0, 1, 2, 3 \ldots$

- Sumar; multiplicar; orden ($0 < 1 < 2 < 3 \ldots$).
- La resta y la división son operaciones parciales: Solo se puede restar o dividir dos naturales para obtener otro natural en ciertos casos. Ejemplo: $3 - 4$ no es un número natural.
- Un conjunto A es *infinito* si tiene infinitos elementos, es decir, si a cada número natural se le puede asignar un elemento diferente de A. Los conjuntos que no son infinitos se denominan *finitos*.
- Un conjunto es *numerable* si a cada uno de sus elementos se le puede asignar un número natural diferente, es decir, si se pueden enumerar sus elementos. Obviamente, $\mathbb{N}$ es infinito numerable. A veces, se reserva la palabra *numerable* para los *infinitos numerables*.

LOS NÚMEROS ENTEROS, $\mathbb{Z}$: $0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots$

- Sumar; *restar*; multiplicar; orden ($\ldots < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 \ldots$).
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. La división de enteros es solo una operación parcial. Por ejemplo, $3/2$ no es un número entero.
- $\mathbb{Z}$ es un conjunto numerable (aunque los enteros se enumeran en un orden diferente del suyo: $0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots$).

LOS NÚMEROS RACIONALES, $\mathbb{Q}$. Los que se pueden expresar como el cociente de dos enteros, p/q, con $q \neq 0$. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

- Sumar; restar; multiplicar; *dividir*; orden (*cuerpo ordenado*). Es *cuerpo*, porque dentro de él se puede sumar, restar, multiplicar y dividir, salvo entre 0, con las propiedades que conocemos; es *cuerpo ordenado* porque, además, tiene un orden total compatible con sus operaciones ($a + c \leq b + c$ siempre que $a \leq b$; $ab \geq 0$, siempre que $a \geq 0, b \geq 0$).

- $\mathbb{Q}$ es un conjunto numerable (aunque los racionales se enumeran en un orden diferente del suyo).
- En forma decimal, los números racionales son los que se expresan mediante un desarrollo periódico (puro o mixto). Ejemplos:
  $-\dfrac{1}{3} = -0.\widehat{3},\ \dfrac{64}{30} = 2.1\widehat{3},\ 5 = 5.\widehat{0} = 4.\widehat{9},\ \dfrac{34}{99} = 0.\widehat{34} = 0.3\widehat{43},\ \dfrac{5}{2} = 2.5 = 2.5\widehat{0}.$

LOS NÚMEROS REALES, $\mathbb{R}$: corresponden a todos los posibles desarrollos decimales, es decir, tienen un número entero como parte entera y cualquier secuencia de los dígitos $0, \ldots, 9$ como parte decimal. El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales se visualiza como una recta; de hecho, se le suele denominar *recta real* y a los números reales, *puntos* de la recta. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

- Sumar; restar; multiplicar; *dividir*; orden (*cuerpo ordenado*).
- Se suele denotar: $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$.
- Los números reales que no son racionales se llaman *irracionales*.

  Ejemplo de número irracional (cualquiera cuyo desarrollo decimal no tenga parte periódica): $1.01001000100001000001\cdots$
- $\mathbb{R}$ *no* es un conjunto numerable.
- *Intervalo cerrado*: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$. *Intervalo abierto*: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$. También se puede poner $]a, b[$ para el intervalo abierto, pero se emplea poco. Se definen de manera evidente los intervalos abiertos por un extremo y cerrados por el otro $]a, b] = (a, b], [a, b[= [a, b)$.
- *Aproximación de números reales:* Cualquier intervalo abierto de $\mathbb{R}$ contiene infinitos irracionales e infinitos racionales.
- *Supremo e ínfimo*: Un elemento c de un conjunto ordenado E es una *cota superior* de un subconjunto $A \subset E$ si $c \geq a$ para todo $a \in A$. Decimos que $d \in E$ es una *cota inferior* de $A \subset E$ si $d \leq a$ para todo $a \in A$. La menor de las cotas superiores de A se denomina *supremo* de A y se denota por $\sup A$. La mayor de las cotas inferiores de A se denomina *ínfimo* de A y se denota por $\inf A$.
- Completitud del orden de $\mathbb{R}$: Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ que tenga cota superior, tiene supremo; todo subconjunto de $\mathbb{R}$ que tenga cota inferior, tiene ínfimo.

  Observemos que $\mathbb{Q}$ no es completo (ésta, junto con la numerabilidad de $\mathbb{Q}$, son las principales diferencias entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$).

Ejemplo 3. El conjunto $A = \{1, 1.01, 1.01001, 1.010010001, \dots\}$, que está formado por infinitos racionales, tiene cotas superiores (por ejemplo, 2), pero no tiene supremo en $\mathbb{Q}$. El supremo de A en $\mathbb{R}$ es el irracional $\sup A = 1.01001000100001\dots$

Si se quiere ser más riguroso, el conjunto $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ se puede definir por inducción: $a_1 = 1, a_k = a_{k-1} + 10^{1-\frac{k(k+1)}{2}}$, para $k > 1$, es decir, el término k-ésimo se obtiene añadiendo al desarrollo del término anterior $k-1$ ceros y un uno. ■

1.4. Funciones y familias.

Una *función* o *aplicación* $f\colon X \rightarrowtail Y$ es una regla que asigna a cada elemento de su *dominio*, que es un cierto subconjunto $\operatorname{dom} f$ del conjunto inicial X, un solo elemento del conjunto final Y (si permitimos que asigne más de uno, la denominamos *multifunción*). Cuando escribamos $f\colon X \to Y$, en vez de $f\colon X \rightarrowtail Y$, queremos señalar que el dominio de f es todo X, o sea, $\operatorname{dom} f = X$. La *imagen* de un subconjunto $A \subset X$ mediante una función $f\colon X \rightarrowtail Y$ es el subconjunto de Y dado por $f(A) = \{y \in Y : y = f(x),$ para algún $x \in A \cap \operatorname{dom} f\}$. La imagen, $f(X)$, del dominio de f se denomina *recorrido* de f.

Recíprocamente, la *imagen inversa* de un subconjunto $B \subset Y$ es el subconjunto de X dado por $f^{-1}(B) = \{x \in \operatorname{dom} f\colon f(x) \in B\}$. Observemos que, en general, f^{-1} *no* es una función de $Y \rightarrowtail X$ (es una multifunción); cuando $f^{-1}\colon Y \rightarrowtail X$ es una función, decimos f es *inyectiva*. Si, además, $f(X) = Y$, entonces se dice que f es *biyectiva*, en cuyo caso, obviamente $f^{-1}\colon Y \to X$ también es biyectiva.

Cuando no se indica explícitamente el dominio, se entiende que es el mayor subconjunto del conjunto inicial para el que la expresión tiene sentido.

Cuando no se considera en el conjunto inicial I de una función $f\colon I \to X$ ninguna estructura, las funciones se suelen denominar *familias* y, en lugar de escribir $a(j)$, se suele poner a_j para $j \in I$. El concepto de familia es similar al de conjunto, salvo que los elementos de la familia están indexados (etiquetados, podríamos decir) respecto del conjunto de índices I. Si $(a_j)_{j\in I}$ es una familia de elementos de un cierto conjunto A, con índices en el conjunto I y $J \subset I$, entonces $(a_j)_{j\in J}$ es una *subfamilia* de $(a_j)_{j\in I}$.

Ejemplo 4. Si A_x es el conjunto de las personas que miden más de x centímetros, entonces $(A_x)_{x\in\mathbb{R}}$ es una familia de conjuntos de personas y $(A_x)_{x\in\mathbb{N}}$ es una subfamilia de la anterior. ■

- Cuando el conjunto de índices es $I = \{1, 2\}$, la familia se denomina *par ordenado* y se

denota por (a_1, a_2). Desgraciadamente la notación coincide con la del intervalo abierto; se distingue por el contexto. Observe la diferencia entre *conjunto de dos elementos* y *par ordenado*: mientras que $\{a, b\} = \{b, a\}$, tenemos $(a, b) \neq (b, a)$, siempre que $a \neq b$. Además, $\{a, a\} = \{a\}$, mientras que $(a, a) \neq \{a\}$.

- De forma más general, cuando el conjunto de índices es $I = \{1, 2 \ldots, n\}$, la familia se denomina *n-tupla ordenada*: por ejemplo (a_1, a_2, a_3), es una *terna ordenada*, (a_1, a_2, a_3, a_4) es una *cuaterna ordenada*, etc.

1.5. Producto cartesiano.

El conjunto cuyos elementos son los pares ordenados (a_1, a_2) con $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$ es el producto cartesiano $A_1 \times A_2$. El producto cartesiano de un conjunto por sí mismo se denota por $A^2 = A \times A$. Análogamente, con más factores, así $A_1 \times A_2 \times A_3$ es el conjunto formado por las ternas de la forma (a_1, a_2, a_3) con $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, a_3 \in A_3$ o, con n factores, $A^n = A \times \cdots \times A$, es el conjunto formado por las n-túplas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, con $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$. Una n–tupla no es más que una ristra de n números.

Ejemplo 5.

- $\{a, b\} \times \{a, b, c\} = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c)\}$.
- $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$.
- $[1, 5] \times [-2, 7) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 5, -2 \leq y < 7\}$.
- $[1, 5]^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x \leq 5, 1 \leq y \leq 5, 1 \leq z \leq 5\}$. ■

1.6. Operaciones con familias.

Las operaciones (ya sean de conjuntos o de números), definidas inicialmente para dos objetos, frecuentemente se pueden extender a familias mayores:

- UNIÓN de una familia de conjuntos, $\cup_{i \in I} A_i$, es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a alguno de los conjuntos A_i. Por supuesto, cuando se unen dos conjuntos se pone $A \cup B$, si son tres $A \cup B \cup C$, etc.
- INTERSECCIÓN de una familia de conjuntos, $\cap_{i \in I} A_i$, es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a todos los conjuntos A_i. La intersección de dos conjuntos se denota por $A \cap B$, la de tres por $A \cap B \cap C$, etc.

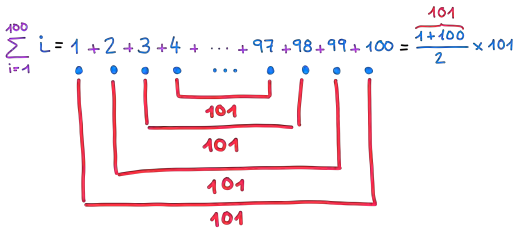


Figura 1. Suma de los términos de un progresión aritmética.

- COMPLEMENTARIO RELATIVO de B EN A, denotado $A \setminus B$: es el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B. Cuando el conjunto A se da por sobreentendido y $B \subset A$, se puede escribir B^c en vez de $A \setminus B$.

  Cuando $A, B \subset \mathbb{R}$, se suele denotar por $A - B$ al conjunto $A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$, ¡no se debe confundir con $A \setminus B$!

  Por ejemplo: $\{1, 2, 5\} \setminus \{1, 2\} = \{5\}$, mientras que $\{1, 2, 5\} - \{1, 2\} = \{0, -1, 1, 4, 3\}$.

La suma de los elementos de una familia de números, con un conjunto de índices I finito, se denota por $\sum_{i\in I} a_i$. En particular, si $I = \{1, 2, \ldots, m\}$, la suma se escribe como $\sum_{i=1}^{m} a_i = a_1 + \cdots + a_m$. Para el producto: $\prod_{i\in I} a_i = \prod_{i=1}^{m} a_n = a_1 a_2 \cdots a_m$.

Ejemplo 6. Veamos algunas expresiones con sumatorios que debemos conocer:

- Si $a_j = a_0 + kj$, entonces $\sum_{j=j_0}^{j_1} a_j = \frac{a_{j_0}+a_{j_1}}{2}(j_1 - j_0 + 1)$.

  Suma progresión aritmética: $\dfrac{\text{El primero más el último}}{\text{dos}} \times n^o$ de sumandos

- Si $b_j = b_0 r^j$, con $r \neq 1$, entonces $\sum_{j=j_0}^{j_1} b_j = \frac{b_{j_0} - b_{j_1+1}}{1-r}$.

  Suma progresión geométrica: $\dfrac{\text{El primero menos el siguiente del último}}{\text{uno menos la razón}}$

- $m! = \prod_{j=1}^{m} j$, *factorial* de $m \in \mathbb{N}$. También se define $0! = 1$.

- $\dbinom{m}{k} = \dfrac{m!}{k!(m-k)!} = \dfrac{\prod_{j=m-k+1}^{m} j}{k!}$. *Número combinatorio*.

- $(a+b)^m = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^k b^{m-k}$. *Binomio de Newton*. ■

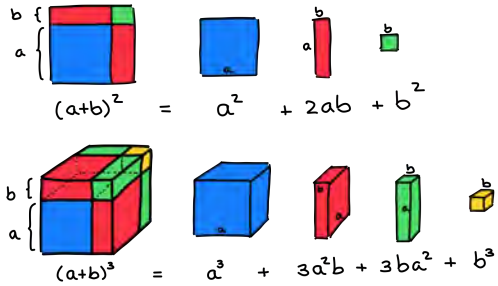


Figura 2. Interpretación geométrica del binomio de Newton para $a, b > 0$, $n = 2, 3$.

1.7. Sucesiones.

Una *sucesión* en un conjunto X, o sucesión de puntos de X, es un tipo particular de función, $b : \mathbb{N} \rightarrowtail X$, con dominio infinito. Aquí X puede ser cualquier conjunto: si $X = \mathbb{R}$, tendremos una sucesión de números reales, si $X = \mathbb{R}^3$, tendremos una sucesión de puntos del espacio, si X está formado por rectas, tendremos una sucesión de rectas, etc.

Se suele emplear la letra n para denotar al índice o variable de una sucesión, pero nosotros procuraremos evitarlo cuando pueda crear confusión, porque la letra n se suele reservar para la dimensión del espacio ambiente.

Para referirnos a las sucesiones, podemos emplear la notación típica de las funciones, por ejemplo, $b(k) = 3k + 1$ o la notación de subíndice o superíndice, por ejemplo $b_k = 3k + 1$, o $b^k = 3k + 1$ (esta última la emplearemos poco, porque se puede confundir con una potencia, pero en otras asignaturas será frecuente). Se trata de la misma sucesión en los tres casos. Hay que acostumbrarse a las tres notaciones, incluso combinadas en una sola expresión. Como el resto de las funciones, lo más correcto es denotar a las sucesiones con una letra, aunque muy frecuentemente, como también ocurre con las funciones, se hace referencia a la variable. Por ejemplo, se debería poner «la sucesión b», «la función f», pero se admite «la sucesión b_k», «la función $f(x)$».

La restricción de una sucesión $b : \mathbb{N} \rightarrowtail X$ a un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ se denomina *subsucesión* de b. Por ejemplo, si $b : \mathbb{N} \to X$ es una sucesión y denotamos por $P \subset \mathbb{N}$ al subconjunto de los números pares, entonces $b|_P$ es la subsucesión de b formada por los términos de índice par. Normalmente, relajando un poco la notación, se pone «la sucesión b_k», «la subsucesión b_{2k}».

Una sucesión $(b_j)_{j \in I}$ de un conjunto ordenado es *creciente* si $b_j \leq b_{j+1}$ para todo $j \in I$. Análogamente, $(b_j)_{j \in I}$ es *decreciente*, si $b_j \geq b_{j+1}$ para todo $j \in I$. Las sucesiones