TOMO I

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

Esta primera unidad didáctica presenta una introducción al cálculo y diseño de los distintos elementos que componen las máquinas mecánicas, y constituye el fundamento sobre el que se asentará posteriormente el cálculo resistente de los distintos elementos.

El objetivo fundamental consiste en establecer un modelo teórico que permita predecir cuándo fallará un elemento de máquina. En otras palabras, se trata de proporcionar un método que permita evaluar la tensión más desfavorable que se presenta en el sólido, y en función de las características tanto del material como del sistema de cargas, conocer el valor máximo que éste es capaz de soportar.

Para ello, es necesario considerar una serie de aspectos, que se pueden enunciar como objetivos generales de esta unidad didáctica del siguiente modo:

OBJETIVOS GENERALES

UNIDAD DIDÁCTICA I
FUNDAMENTOS DEL DISEÑO DE MÁQUINAS

- **Establecer las relaciones fundamentales entre las cargas que actúan sobre un elemento y las tensiones que en él aparecen.**
- **Presentar las propiedades mecánicas de los distintos tipos de materiales empleados en la construcción de maquinaria.**
- **Introducir el procedimiento de cálculo de resistencias, estática y a fatiga, en función de las características tanto de la carga que actúa como del material del elemento, así como los criterios de selección de las teorías de fallo aplicables en cada caso.**

CONTENIDOS

El contenido de esta unidad didáctica se ha dividido en cuatro temas, y cada uno de los temas en capítulos, hasta un total de diez:

ESQUEMA – RESUMEN

UNIDAD DIDÁCTICA I
FUNDAMENTOS DEL DISEÑO DE MÁQUINAS

TEMA 1. Fundamentos del diseño mecánico
- CAPÍTULO 1. Seguridad y fiabilidad
- CAPÍTULO 2. Análisis de tensiones
- CAPÍTULO 3. Análisis de deformaciones

TEMA 2. Materiales
- CAPÍTULO 4. Propiedades mecánicas de los materiales
- CAPÍTULO 5. Materiales empleados en la construcción de maquinaria

TEMA 3. Consideraciones estáticas en el diseño mecánico
- CAPÍTULO 6. Diseño por resistencia estática
- CAPÍTULO 7. Fractura estática

TEMA 4. Consideraciones dinámicas en el diseño mecánico
- CAPÍTULO 8. Diseño por resistencia a la fatiga frente a cargas alternantes
- CAPÍTULO 9. Diseño por resistencia a la fatiga frente a cargas fluctuantes
- CAPÍTULO 10. Daño acumulado por fatiga

El primero de los temas trata algunos aspectos fundamentales del diseño, y se compone de tres capítulos. El capítulo primero presenta los dos enfoques del diseño mecánico: el diseño por seguridad y el diseño probabilístico, e introduce los conceptos de factor de seguridad y fiabilidad. En los capítulos segundo y tercero se presentan los análisis de tensiones y deformaciones, respectivamente, en el sólido elástico. No se trata de un estudio detallado, que correspondería a la teoría de la elasticidad, sino más bien de un extracto de los contenidos de la elasticidad que tienen aplicación directa en el cálculo resistente de elementos de máquina.

El tema segundo estudia las propiedades mecánicas de los materiales empleados en la construcción de maquinaria, desde el punto de vista de su comportamiento resistente. Puesto que estos materiales de maquinaria son en su mayoría metales, y fundamentalmente aceros, los contenidos de este tema tienen mucho que ver con los de la metalotecnia; si bien tampoco en este caso se trata de un estudio exhaustivo de su comportamiento, sino de establecer las propiedades características de cada material, su variación con los factores externos y su influencia en el comportamiento en servicio. El capítulo cuarto, primero de este tema, presenta la descripción de las distintas propiedades de los materiales –resistencia, dureza, elasticidad y plasticidad, ductilidad, etc.– de manera, por así decir, genérica, mientras que en el quinto se describe cómo son cada una de las anteriores propiedades en los distintos metales y aleaciones utilizados en ingeniería.

El tema tercero introduce el diseño por resistencia estática. El primero de sus capítulos, el capítulo 6, estudia las condiciones y criterios de fallo, es decir, de inicio de grieta, mientras que el capítulo 7 estudia las condiciones de propagación de la misma. Se introducen algunos conceptos fundamentales, como el de tensión equivalente, según cada una de las teorías de fallo, y se discute la adecuación de los distintos criterios a las características de ductilidad o fragilidad del material.

El tema cuarto presenta los fundamentos del diseño por fatiga, es decir, del cálculo resistente ante cargas o solicitaciones que varían con el tiempo. En el capítulo 8 se estudia el comportamiento de los materiales ante cargas alternantes, es decir, cargas que oscilan entre dos valores iguales y de signo contrario, introduciendo el diagrama de fatiga y los conceptos de resistencia a la fatiga y límite de fatiga. El capítulo 9 generaliza el estudio anterior al caso de tensión media no nula, y presenta las distintas teorías de variación de la resistencia a la fatiga con la tensión media, introduciendo el concepto de línea de carga, fundamental para el cálculo del factor de seguridad. El capítulo 10 presenta el comportamiento de materiales sometidos a cargas de fatiga después de haber sido sometidos a una carga previa que, sin llegar a la rotura, haya producido daño en el material. Este cuarto tema es de fundamental importancia para el diseño de máquinas, puesto que la mayor parte de los elementos que las componen están en movimiento durante el servicio, lo que produce solicitaciones variables, es decir cargas de fatiga, cuyo criterio de seguridad es, en la inmensa mayoría de los casos, mucho más restrictivo que el criterio de seguridad por fallo estático.

Lo anterior constituye el fundamento del diseño mecánico, que se habrá de aplicar, posteriormente, al cálculo de los distintos elementos, si bien cada uno de ellos presentará sus peculiaridades. La aplicación de estos conceptos fundamentales y la presentación de las peculiaridades de cada elemento será de lo que traten las siguientes unidades didácticas.

BIBLIOGRAFÍA

- B. J. Hamrock, B. Jacobson, S. R. Schmid, *Elementos de Máquinas*, McGraw–Hill, Méjico, 2000.
- L. Ortiz, *Elasticidad*, McGraw–Hill, Madrid, 1999.
- L. Ortiz, *Resistencia de Materiales*, McGraw–Hill, Madrid, 1990.
- J. E. Shigley, L. D. Mischke, *Diseño en Ingeniería Mecánica*, McGraw–Hill, Méjico, 5ª edición (4ª edición en español), 1990.

TEMA 1

FUNDAMENTOS DEL DISEÑO MECÁNICO

En este tema se introducen los dos enfoques fundamentales del diseño mecánico: el diseño por seguridad y el diseño probabilístico. Asimismo, se establecen las consideraciones generales sobre los estados de tensión y deformación producidos en un sólido elástico por un sistema de cargas, que serán de aplicación directa en el cálculo resistente de los elementos de máquina.

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

El objetivo fundamental de este primer tema consiste en establecer la relación entre el estado tensional que se produce en un sólido elástico y el sistema de cargas externas que actúa sobre el mismo. Dirigidos a éste, aparecen objetivos parciales que se pueden enunciar como sigue:

OBJETIVOS

TEMA 1
FUNDAMENTOS DEL DISEÑO MECÁNICO

- **Introducir los conceptos de seguridad, fiabilidad y factor de seguridad estadístico.**
- **Establecer la distinción entre factor de diseño y factor de seguridad, así como entre la doble interpretación del factor de seguridad como factor de carga o de resistencia.**
- **Presentar el método de cálculo de las tensiones principales en un punto de un sólido elástico.**
- **Exponer los métodos de cálculo de los diagramas de esfuerzos y momentos.**
- **Obtener las distribuciones de tensiones en las secciones de un sólido elástico por efecto de las distintas solicitaciones simples, así como los estados de deformación que cada una origina.**
- **Presentar los métodos energéticos para la resolución de problemas hiperestáticos.**

CONTENIDOS

Este primer tema abarca los capítulos 1 a 3 y trata de presentar un resumen de conceptos básicos, no específicos del diseño de máquinas, pero que le sirven de fundamento. El capítulo primero presenta una visión general del diseño mecánico e introduce los conceptos de seguridad y fiabilidad, así como su formulación mediante los correspondientes factores o coeficientes. Dentro de lo que es seguridad, es importante la distinción que se establece entre el factor de diseño y el factor de seguridad propiamente dicho, así como la doble interpretación del factor de seguridad, como factor de aplicación de la carga o de reducción de la resistencia.

El capítulo 2 presenta el análisis del estado tensional producido por un sistema de cargas en un sólido elástico. Se trata de presentar los contenidos de la teoría de la elasticidad que tendrán aplicación directa en el cálculo resistente de los distintos elementos. Así, tras introducir el tensor de tensiones, las tensiones principales y los círculos de Mohr, así como su particularización para el caso de estados tensionales planos, se describe la construcción de los diagramas de esfuerzos y momentos, y a partir de ellos, el cálculo de las distribuciones de tensiones en las secciones. Todo ello es necesario para conocer qué solicitación actúa en cada lugar, y determinar así la resistencia que se ha de asegurar.

El capítulo 3, último de este tema, presenta el análisis de las deformaciones producidas por un estado de carga. Como antes, el alcance se limita a los aspectos que puedan tener aplicación más o menos directa en el diseño de máquinas.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Para la adecuada asimilación de los contenidos de este tema se consideran imprescindibles algunos conocimientos acerca de:

- Conceptos fundamentales de mecánica, en especial lo relativo al equilibrio estático.
- Conceptos estadísticos básicos: variable aleatoria, media, varianza.
- Conceptos básicos de elasticidad y resistencia de materiales: tensión, deformación.

CAPÍTULO 1

SEGURIDAD Y FIABILIDAD

En este capítulo se presenta una visión general introductoria de lo que es el diseño mecánico. Aparecen dos conceptos fundamentales: el factor de seguridad y el coeficiente de fiabilidad. Fiabilidad y seguridad surgen como dos maneras de expresar una misma realidad, y se relacionan entre sí a través del concepto de factor de seguridad estadístico, concepto que también se introduce.

1.1. FACTOR DE SEGURIDAD Y COEFICIENTE DE FIABILIDAD

Es una realidad patente que las cosas fallan, es decir, que por la razón que fuere resultan incapaces de realizar la función para la que habían sido pensadas, y que tal vez realizaron de modo satisfactorio en un principio. El problema que se plantea es cómo diseñar algo que realice su función, de forma que no falle.

Lo primero que se necesita es un parámetro que defina el estado del sistema, esto es, un parámetro que disponga de un rango de valores dentro del cual cabe esperar un comportamiento satisfactorio del sistema, y que fuera del mismo dé lugar al fallo. A modo de ejemplo, considérese el armario de la unidad central de una computadora. La electrónica que contiene es delicada y de hecho, en ciertas situaciones, falla. Sin embargo, se sabe que muchos de estos fallos vienen motivados por aumentos de la temperatura de trabajo, de tal manera que si ésta no supera un cierto valor, el funcionamiento será, con toda probabilidad, correcto. En este caso se dispone del parámetro indicativo del estado del sistema: la temperatura, y bastará con establecer, mediante ensayos por ejemplo, el valor límite, por encima del cual se produce el fallo, para tener un criterio de diseño eficaz. Un buen diseño, en este caso, será aquél que dispone las distintas placas a una distancia suficiente para permitir el paso del aire y la evacuación del calor, o que incorpora un ventilador de la necesaria potencia, con la misma idea. El problema fundamental estriba en que no siempre es fácil encontrar un parámetro indicativo del estado del sistema, ni determinar el valor límite del mismo. Asimismo, es evidente que no se puede aspirar a encontrar un único parámetro que represente con fidelidad el riesgo de fallo; de hecho lo frecuente es que existan varios parámetros diferentes, totalmente independientes entre sí, lo que es tanto como afirmar el conocido hecho de que pueden existir distintas causas de fallo. En el ejemplo anterior, con independencia de la temperatura, una excesiva humedad del aire circundante puede producir algún tipo de corrosión, que impida el contacto eléctrico, produciendo otro tipo de fallo. Con frecuencia, incluso, los diferentes parámetros no son independientes entre sí, lo que dificulta aún más la tarea de encontrar los límites de separación entre los valores representativos de los estados de fallo y no fallo.

En definitiva, y como paso previo al diseño, se trata de encontrar todas las posibles causas de fallo, los parámetros que representan cada una de ellas y su valor límite. A partir de aquí, se plantea el problema de diseño como disponer las cosas de manera que ninguno de los parámetros representativos supere su valor límite.

De manera general, se define el factor de seguridad respecto a un parámetro representativo del estado del sistema, como el cociente entre el valor límite de ese parámetro, y su valor actual o previsto en el diseño:

$$n_\xi = \frac{\xi_{lim}}{\xi}$$

Esta definición, sin embargo, no tiene mucho sentido si el parámetro escogido no tiene un origen significativo. En el ejemplo anterior, esta relación de temperaturas no proporciona mucha información. De entrada depende del sistema de unidades (no daría el mismo resultado en grados Celsius que en grados Kelvin), lo que no es en absoluto deseable. Parece que proporciona más información el parámetro incremento de temperatura respecto a una temperatura de referencia, que puede ser una temperatura ambiente media del lugar de que se trate. Así, si el factor de seguridad es 2,

$$n_{\Delta T} = \frac{\Delta T_{lim}}{\Delta T} = \frac{T_{lim} - T_0}{T - T_0} = 2$$

significa que la temperatura de trabajo se ha elevado por encima de la temperatura ambiente la mitad de lo que puede elevarse sin que falle, lo que tiene un significado físico mucho más claro. Lo ideal es que un valor nulo del parámetro corresponda a una situación en la que el fallo es prácticamente imposible. De este modo, el factor de seguridad, que en tal caso tomaría un valor infinito, reflejaría numéricamente esta circunstancia. Así pues,

Un parámetro representativo del estado de un sistema es aquél que presenta un valor límite, a partir del cual cabe esperar que se presente el fallo, y no antes. Para poder hablar de factor de seguridad, el valor cero del parámetro debe corresponder a un estado de seguridad prácticamente absoluta, y en tal caso, el factor de seguridad respecto al parámetro se define como el cociente entre el valor límite del mismo y el valor actual (caso de verificación) o previsto (caso de diseño).

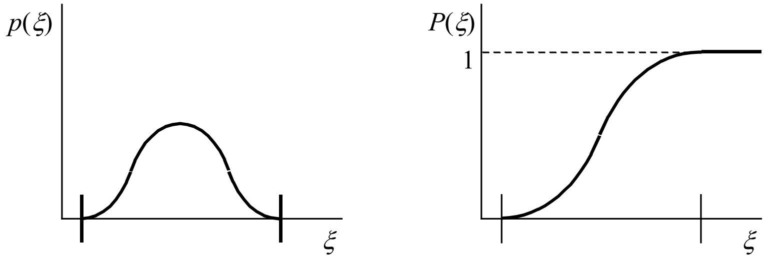

Figura 1.1. Distribuciones típicas de un parámetro característico de un sistema mecánico.

Sin embargo, es ingenuo pensar que existirá un valor límite de un parámetro que defina la separación entre el funcionamiento correcto y el fallo del sistema. En la realidad se presentarán distribuciones estadísticas, con funciones de densidad de probabilidad normalizada de fallo $p(\xi)$ y de probabilidad acumulada de fallo $P(\xi)$, como las de la Figura 1.1. Entonces se define el coeficiente de fiabilidad R para un valor ξ_0 del parámetro como la probabilidad de buen funcionamiento cuando el parámetro toma ese valor, que viene dada por:

$$R(\xi_0) = 1 - P(\xi_0) = 1 - \int_{-\infty}^{\xi_0} p(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi$$

En el caso concreto del diseño mecánico, parece que el sistema de fuerzas que actúa sobre un elemento es un parámetro bastante indicativo del funcionamiento del mismo. Desde este punto de vista, el fallo se llama rotura, y supuesto que exista un valor límite de la fuerza F_{lim} que separe la supervivencia de la rotura, el factor de seguridad respecto a la fuerza vendrá dado por:

$$n = \frac{F_{lim}}{F}$$

Sin embargo, en la práctica no existe esa F_{lim}, sino que se obtendrá una distribución de valores de F que producen la rotura. El caso ideal sería aquél en el que la función de distribución de probabilidad de fallo fuese una delta de Dirac, y consecuentemente la función de probabilidad acumulada, una función escalón unitario, pero este caso no se presenta en la realidad. Suponiendo que la función de densidad de probabilidad de fallo es $p(F)$, la fiabilidad del sistema cuando actúa sobre él una fuerza F_0 vendrá dada por la expresión:

$$R(F_0) = 1 - \int_{-\infty}^{F_0} p(F)\,\mathrm{d}\,F$$

Un estudio más detallado del problema revela que, si bien la carga exterior refleja con bastante fidelidad la situación del elemento sobre el que actúa, el valor límite de dicha fuerza depende no sólo de su naturaleza y del material del sólido, sino también del tamaño y forma del mismo. Ello supone que no es posible conocer el valor de F_{lim} ni de $R(F)$ si no es mediante el ensayo destructivo de una serie de piezas iguales a la que se desea estudiar. Por eso, se introduce un parámetro más general, cuyo valor límite va a depender sólo del material: la tensión, o fuerza por unidad de superficie, σ. Así pues, un sistema de cargas exteriores produce en un sólido un estado de tensiones que es función de su valor y de la forma y tamaño del sólido. Sin embargo el valor límite de esa tensión va a venir dado en función exclusivamente del material. Este valor límite de la tensión, propiedad del material, es lo que se conoce como resistencia, y se designará por S. Así pues, el factor de seguridad vendrá dado por el cociente entre la resistencia del material y la tensión presente en el sólido:

$$n = \frac{S}{\sigma}$$

Más adelante se introducirán distintas resistencias (a fluencia, a rotura, a fatiga, etc.) de manera que se hablará de seguridad a fluencia, a rotura, a fatiga, etc., según se introduzca un valor u otro en el numerador de la expresión anterior. En cualquier caso, de aquí en adelante se entenderá siempre el factor de seguridad como la relación entre el valor de una resistencia y una tensión, sin olvidar nunca que:

La resistencia es una propiedad del material, la tensión depende de la carga que actúa y de la forma del sólido.

1.2. FACTOR DE SEGURIDAD ESTADÍSTICO

El hecho de que la tensión que produce la rotura de un material no tenga un valor límite definido, sino una distribución estadística, plantea un inconveniente a la hora de establecer el valor de la resistencia. Por lo general, los valores que se encuentran en las tablas de materiales se refieren al límite inferior del intervalo de probabilidad de fallo no nula –de forma que se garantiza el buen funcionamiento para tensiones inferiores, y se predice la rotura para unas tensiones superiores, que no siempre darán lugar a ella–, pero se ha de poner atención, porque no todas las resistencias se refieren a este límite inferior. En particular, muchas de las resistencias que se evalúan mediante cálculos, como es el caso de las resistencias a fatiga, no garantizan el buen funcionamiento con una probabilidad del 100%.

Es posible relacionar seguridad y fiabilidad a través del valor límite escogido para la resistencia. Si se designa por S_R la resistencia que proporciona una fiabilidad R,

$$1 - R = P(S_R) = \int_0^{S_R} p(S)\,\mathrm{d}\,S$$

el factor de seguridad para una fiabilidad R vendrá dado por:

$$n_R = \frac{S_R}{\sigma}$$

que es lo que se conoce como factor de seguridad estadístico.

EJEMPLO 1.1

La función de densidad de la distribución de la resistencia de rotura de un material hipotético viene dada por:

$$\begin{aligned} p(S) &= 0 & S &\leq 120\ \text{MPa} \\ p(S) &= 0{,}05 & 120 < S &\leq 140\ \text{MPa} \\ p(S) &= 0 & S &> 140\ \text{MPa} \end{aligned}$$

Supuesto que el sólido está sometido en un punto a una tensión de 100 MPa, calcular el factor de seguridad para una fiabilidad del 85%.

SOLUCIÓN

El valor de la resistencia que proporciona una fiabilidad del 85% será el que verifique:

$$1 - 0{,}85 = 0{,}15 = \int_0^{S_{85}} p(S)\,\mathrm{d}S = \int_{120}^{S_{85}} 0{,}05\,\mathrm{d}S = 0{,}05(S_{85} - 120)$$

$$S_{85} = \frac{0{,}15}{0{,}05} + 120 = 123\ \text{MPa}$$

En consecuencia, el factor de seguridad pedido será:

$$n_{85} = \frac{S_{85}}{\sigma} = \frac{123}{100} = 1{,}23$$

1.3. FACTOR DE APLICACIÓN Y FACTOR DE RESISTENCIA

Cuando se verifica un elemento, cabe suponer que se conocen los valores de la resistencia del material que lo compone y de la tensión que actúa sobre él, de forma que el factor de seguridad, relación entre ambos valores, da una idea de lo alejado que se encuentra de la situación crítica de rotura. Sin embargo, cuando se diseña un elemento, el proceso es ligeramente distinto. En este caso se ha de considerar un factor, comúnmente llamado factor de diseño, en previsión tanto de indeterminaciones en los valores de las resistencias como de posibles sobrecargas sobre el elemento.

> **Se define el factor de diseño n_d como el cociente entre la resistencia esperada del material y la tensión a la que se supone que estará sometido el elemento. El factor de seguridad n es el cociente entre los valores reales de resistencia y tensión.**

Naturalmente, si las cosas ocurren en la realidad como se previeron en el diseño, factor de diseño y factor de seguridad coinciden. No obstante, no siempre ocurre esto. Incluso en el caso en que resistencias y tensiones estuviesen correctamente estimadas, puede suceder que el factor de diseño previsto no sea posible. Es el caso, por ejemplo, de un tornillo, en el que los diámetros están normalizados, de manera que, para un sistema de cargas dado, sólo son posibles determinados valores del factor de seguridad.

Una vez establecido el factor de diseño, se ha de verificar que la tensión en el sólido no supere el valor S/n_d, lo que introduce el concepto de tensión admisible:

> **La tensión admisible es el valor máximo que puede tomar la tensión en un punto de un elemento de manera que no se rebase el factor de diseño establecido.**

Numéricamente, la tensión admisible coincide con el valor de la resistencia dividido por el factor de diseño,

$$\sigma_{adm} = \frac{S}{n_d}$$

si bien se ha de tener presente que la tensión admisible –tensión al fin y al cabo– sigue siendo una propiedad de la carga, mientras que la resistencia lo es del material.

En ocasiones el factor de diseño se desglosa en un factor de resistencia n_S y un factor de sobrecarga, también llamado factor de aplicación o de servicio, n_L. En tal caso, el diseño se realiza considerando un valor de la resistencia del material S/n_S y un valor de la tensión $n_L\sigma$ –proveniente de considerar la fuerza exterior multiplicada por el mismo n_L–, y buscando que el primero sea mayor o igual que el segundo. Este planteamiento tiene la ventaja de permitir afectar de factores de servicio diferentes a las diferentes fuerzas exteriores que actúan sobre el sólido, pues no todas tienen por qué estar sujetas al mismo grado de sobrecarga o incertidumbre.

CAPÍTULO 2

ANÁLISIS DE TENSIONES

En este capítulo se aborda el estudio del estado de tensiones en un sólido elástico. En primer lugar se considerará el estado tensional en un punto, para lo que se introducirá el tensor de tensiones, las tensiones principales y los círculos de Mohr, que después se particularizará para el caso de estado plano. Seguidamente se determinarán las relaciones entre los sistemas de carga y las solicitaciones que se producen en las secciones, para finalmente presentar la distribución de tensiones en los puntos de cada sección producida por las distintas solicitaciones. El objetivo final que se persigue es proporcionar la herramienta que permita evaluar la tensión máxima que se presenta en un sólido cuando sobre él actúa un sistema de fuerzas, para así poder compararlo con la resistencia y evaluar el factor de seguridad.

2.1. CARGA ESTÁTICA

El objetivo de este capítulo es relacionar el sistema de cargas que actúa sobre un sólido elástico con el valor de la tensión que aparece en cada punto del mismo, y de esta forma poder, más adelante, determinar la tensión máxima y los factores de seguridad. Para ello se utilizarán las ecuaciones de la elasticidad y la resistencia de materiales, las cuales se basan, entre otras hipótesis, en la aplicación progresiva de la carga, que merece un comentario introductorio.

Si sobre un sólido elástico en equilibrio se hace actuar una fuerza exterior, ésta moverá el punto del sólido en el que actúa, produciendo una deformación y la consiguiente aparición de esfuerzos interiores que tiendan a oponerse a tal deformación. Llegado el punto en que dichos esfuerzos compensen el valor de la fuerza se habrá alcanzado el equilibrio. Sin embargo, en este instante, el punto de aplicación de la fuerza tendrá una velocidad no nula, por lo que, en ausencia de fuerza, continuará su movimiento, aumentando la deformación. Ello dará lugar a un aumento de los esfuerzos interiores, a un nuevo desequilibrio de fuerzas y a una aceleración en sentido opuesto a la fuerza exterior. El resultado final sería un movimiento

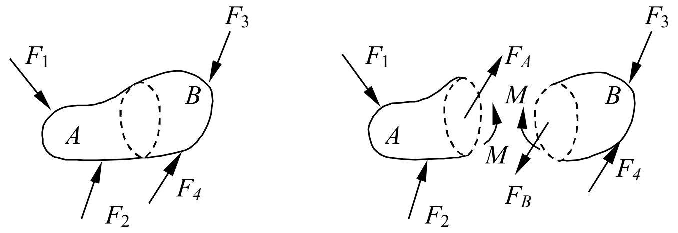

Figura 2.1. Equilibrio del sólido elástico.

vibratorio de los puntos del sólido elástico en torno a una posición de equilibrio; algo parecido a lo que ocurre cuando se carga un muelle de compresión con un peso, y se produce una oscilación en torno al punto de equilibrio.

En el lado opuesto, si una carga se aplica de forma que su valor, inicialmente nulo, vaya creciendo a medida que el sólido se va deformando, de manera que fuerza exterior y esfuerzos interiores estén siempre en equilibrio, no se tendrá vibración alguna. Ya se comprende que se trata de un modelo ideal de aplicación de la carga, que en la realidad requeriría un tiempo infinito. A pesar de ello, este modelo se ajusta a la realidad mucho mejor que el primero. Si sobre un sólido en reposo actúa instantáneamente una fuerza de valor finito, se pasaría instantáneamente de tener una aceleración nula a tener una aceleración finita, lo que supone una sobreaceleración primera infinita. Tampoco la hipótesis última es del todo cierta, pero es muy razonable admitir que la aplicación de la carga, aun no siendo lenta, es progresiva, lo que evita sobreaceleraciones infinitas. Desde luego se va a producir una pequeña vibración en torno a la posición de equilibrio, pero ésta va a ser muy pequeña, y la energía que consuma, despreciable frente a la energía de deformación elástica que almacene el sólido. En consecuencia, se admitirá la hipótesis de aplicación progresiva y lenta de las cargas.

2.2. ANÁLISIS DE TENSIONES. TEOREMA DE RECIPROCIDAD

Supóngase que se tiene un sólido elástico sobre el que actúan unas fuerzas exteriores, entre las que se incluyen las reacciones en los apoyos, como muestra la Figura 2.1. Si este sólido está en equilibrio, necesariamente se ha de verificar que la resultante y el momento de ese sistema de fuerzas exteriores sean nulos:

$$\sum \mathbf{F}_i = 0$$
$$\sum \mathbf{M}_i = 0$$

Si ahora se supone el sólido dividido en dos partes, A y B, es evidente que la suma vectorial de fuerzas que actúan sobre todo el sólido es igual a la suma de las que actúan en A más las que actúan en B, y lo mismo los momentos, es decir,

$$\sum \mathbf{F}_i = \sum_A \mathbf{F}_i + \sum_B \mathbf{F}_i = 0$$

$$\sum \mathbf{M}_i = \sum_A \mathbf{M}_i + \sum_B \mathbf{M}_i = 0$$

Si a continuación se considera cada uno de los trozos por separado, se tiene que, puesto que también cada trozo está en equilibrio, la resultante y el momento de las fuerzas que actúan sobre cada uno de ellos han de ser nulos. Sin embargo, de la ecuación anterior se deduce inmediatamente:

$$\sum_A \mathbf{F}_i = -\sum_B \mathbf{F}_i \neq 0$$

$$\sum_A \mathbf{M}_i = -\sum_B \mathbf{M}_i \neq 0$$

lo que obliga a que sobre la sección que separa A y B actúen una fuerza $\mathbf{F}_A$ (o $\mathbf{F}_B$) y un momento $\mathbf{M}_A$ (o $\mathbf{M}_B$) que equilibren los anteriores. Por consiguiente, se ha de cumplir:

$$\sum_A \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_A = 0 \qquad \sum_A \mathbf{M}_i + \mathbf{M}_A = 0$$

$$\sum_B \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_B = 0 \qquad \sum_B \mathbf{M}_i + \mathbf{M}_B = 0$$

de donde se deduce inmediatamente:

$$\mathbf{F}_A = \sum_B \mathbf{F}_i \qquad \mathbf{M}_A = \sum_B \mathbf{M}_i$$

$$\mathbf{F}_B = \sum_A \mathbf{F}_i \qquad \mathbf{M}_B = \sum_A \mathbf{M}_i$$

Es decir,

> **La fuerza y el momento que actúan sobre una sección de un sólido elástico en equilibrio son iguales a la resultante y el momento de las fuerzas exteriores que actúan sobre la porción de sólido separado por esa sección que no contiene a la misma.**

De lo anterior se deduce que la fuerza y momento en la sección de una de las porciones son iguales y de signo contrario a la resultante y momento en la sección de la otra porción, de manera que, al estar ambas porciones unidas, en el balance global del estado del sólido, se anulan.

Esta fuerza que actúa en la sección es lo que se conoce como esfuerzo en la sección, y también como resultante en la sección. Esta última denominación surge por el hecho de que

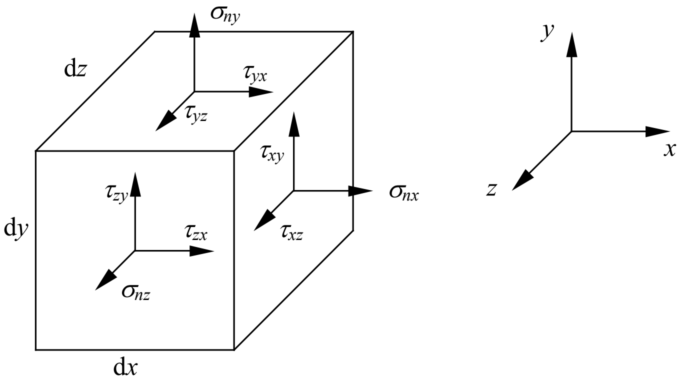

Figura 2.2. Equilibrio del volumen elemental de sólido elástico.

el esfuerzo en la sección es en realidad la resultante de infinitos esfuerzos diferenciales, que actúan cada uno en un diferencial de área. Del mismo modo, el momento en la sección no es otra cosa que la integral de los momentos diferenciales creados por cada uno de estos esfuerzos diferenciales. Para visualizar que efectivamente el esfuerzo en la sección se reparte por el área de la misma, basta imaginar sucesivos cortes por planos hasta dejar un paralelepípedo de dimensiones diferenciales. Como después de cada corte habrá habido que situar una fuerza en cada una de las secciones generadas, al final resultará un esfuerzo en cada una de las caras del paralelepípedo diferencial. Esta fuerza introduce el concepto de tensión, σ:

> **Se conoce como tensión al cociente entre la fuerza que actúa sobre un elemento de la sección y el área del mismo.**

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mathrm{d}\,\mathbf{F}_\Omega}{\mathrm{d}\,\Omega}$$

De acuerdo con ello, se tiene para el momento en la sección,

$$\mathbf{M}_\Omega = \int_\Omega \mathbf{r} \times \mathrm{d}\,\mathbf{F}_\Omega = \int_\Omega \mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\,\Omega$$

$\mathbf{F}_\Omega$ y $\mathbf{M}_\Omega$ son, en consecuencia, la resultante y el momento de un sistema de fuerzas que actúa distribuido por toda la sección, y la determinación de sus valores es relativamente sencilla mediante el procedimiento del corte por las secciones. Cómo es esta distribución, y en particular dónde toma el valor máximo, depende de otros factores, entre ellos la geometría del sólido, y se considerará más adelante.

Se acostumbra a descomponer el esfuerzo en la sección en dos componentes: la componente perpendicular al plano de la sección (a la que se conoce como esfuerzo normal), y la contenida en el plano de la misma (llamada esfuerzo tangencial o cortante). Del mismo modo, la componente del momento perpendicular a la sección se designa por momento torsor, y por momento flector la contenida en ella. De la misma manera, se llama tensión normal σ_n la componente de la tensión en dirección perpendicular a la sección, y tensión tangencial o cortante τ la contenida en ella.

Para estudiar el estado de tensiones en un punto de un sólido elástico se considerará un paralelepípedo elemental de lados $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ y $\mathrm{d}z$, como el que se ha representado en la Figura 2.2. Sobre cada una de sus caras actuará una tensión normal y una cortante. La cortante se ha descompuesto en dos componentes, paralelas a los ejes de referencia. Las tensiones normales se designan por σ_n, seguido de un segundo subíndice, correspondiente al eje al que son paralelas. Las tensiones tangenciales se designan por τ, seguido de dos subíndices: el primero de ellos indicativo del eje perpendicular al plano sobre el que actúan, y el segundo indicativo del eje al que son paralelas. Las tensiones normales se consideran positivas si salen del elemento de volumen, y negativas si entran. Las tangenciales son positivas si tienen el sentido positivo del eje al que son paralelas y actúan sobre una cara vista, o sentido inverso si lo hacen sobre cara oculta, y negativas en caso contrario. Este criterio de signos se justifica por el hecho de que una cara oculta está en contacto con una cara vista del elemento anexo, por lo que sus tensiones, que han de tener sentido opuesto a las de la cara vista, tendrán el mismo signo que las de ésta. En definitiva, se consigue que el signo del esfuerzo en la sección no dependa de la porción de sólido considerada (a uno u otro lado de la sección).

Si el elemento de volumen considerado está en equilibrio, el momento de las fuerzas que actúan sobre el elemento respecto del eje que contiene a σ_{nx} ha de ser cero. Pero respecto de ese eje, sólo producen momento τ_{xy}, τ_{xz} y las correspondientes a estas dos sobre las caras no vistas, τ'_{zy} y τ'_{yz}, de manera que:

$$\tau_{zy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}z}{2}+\tau'_{zy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}z}{2}-\tau_{yz}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\frac{\mathrm{d}y}{2}-\tau'_{yz}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\frac{\mathrm{d}y}{2}=0$$

$$\tau_{zy}+\tau'_{zy}-\tau_{yz}-\tau'_{yz}=0$$

y teniendo en cuenta que:

$$\tau'_{zy}=\tau_{zy}-\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\mathrm{d}z$$

$$\tau'_{yz}=\tau_{yz}-\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}\mathrm{d}y$$

resulta:

$$\tau_{zy}+\tau_{zy}-\left(\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\mathrm{d}z\right)-\tau_{yz}-\tau_{yz}+\left(\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)=0$$

y despreciando los términos entre paréntesis, diferenciales de orden superior,

$$\tau_{zy}=\tau_{yz}$$

Procediendo de manera análoga con los otros dos ejes, se obtiene:

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

lo que se conoce como teorema de reciprocidad de las tensiones tangenciales.

2.3. TENSOR DE TENSIONES. TENSIONES PRINCIPALES

Si al elemento diferencial de volumen anterior se le practica un nuevo corte por un plano, como el de la Figura 2.3, cuyos cosenos directores sean α, β y γ, es decir, su vector director (α, β, γ), se tiene que, para que el tetraedro resultante esté en equilibrio, se ha de cumplir, entre otras cosas, que la resultante según el eje x sea nula, es decir,

$$\sigma_{nx}\,\mathrm{d}\,\Omega_x + \tau_{xy}\,\mathrm{d}\,\Omega_y + \tau_{xz}\,\mathrm{d}\,\Omega_z = \sigma_x\,\mathrm{d}\,\Omega$$

y teniendo en cuenta que:

$$\mathrm{d}\,\Omega_x = \alpha\,\mathrm{d}\,\Omega$$

$$\mathrm{d}\,\Omega_y = \beta\,\mathrm{d}\,\Omega$$

$$\mathrm{d}\,\Omega_z = \gamma\,\mathrm{d}\,\Omega$$

resulta:

$$\sigma_x = \sigma_{nx}\alpha + \tau_{xy}\beta + \tau_{xz}\gamma$$

Procediendo de manera análoga con los ejes y y z, se obtiene:

$$\sigma_y = \tau_{xy}\alpha + \sigma_{ny}\beta + \tau_{yz}\gamma$$

$$\sigma_z = \tau_{xz}\alpha + \tau_{yz}\beta + \sigma_{nz}\gamma$$

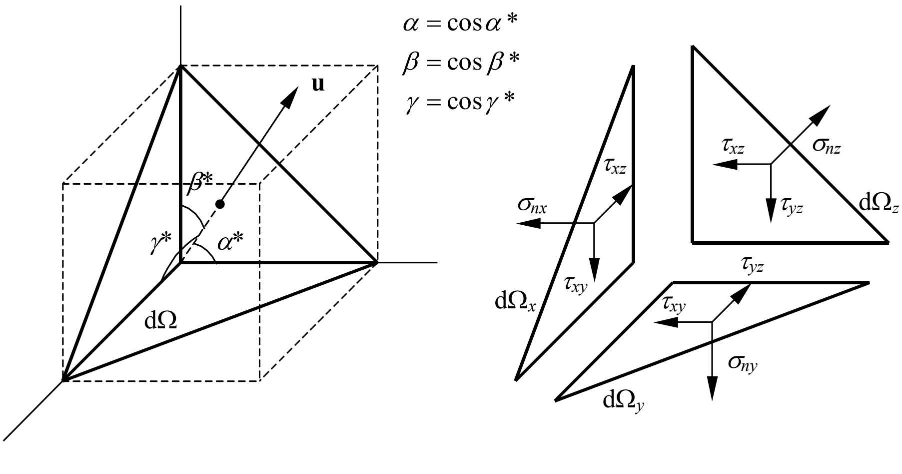

Figura 2.3. Tensión en un plano.

Las tres ecuaciones anteriores se pueden escribir de forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{nx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{ny} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{nz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = [T]\,\mathbf{u}$$

$[T]$ es lo que se conoce como tensor de tensiones o matriz de tensiones. El tensor de tensiones es distinto en cada punto del sólido elástico, pero se cumple siempre lo siguiente:

> **Las componentes del vector tensión en un punto de un plano se obtienen mediante el producto del tensor de tensiones en ese punto y el vector director del plano.**

Por consiguiente, conocido el tensor de tensiones en un punto, serán conocidos los vectores tensión en todos los planos que pasan por el punto. Obsérvese que α, β y γ no son ángulos, sino cosenos. Finalmente, las componentes normal y cortante de la tensión en el plano, recordando que la proyección de un vector en la dirección de otro unitario viene dada por el producto escalar de ambos, serán:

$$\sigma_n = \sigma_x\alpha + \sigma_y\beta + \sigma_z\gamma$$

$$\tau = \sqrt{\sigma^2 - \sigma_n^2}$$

donde se ha designado por σ el módulo del vector tensión en el plano considerado, cuyo valor viene dado por la conocida expresión:

$$\sigma = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2}$$

Cabe plantearse si existirán o no planos para los cuales la tensión en el punto considerado sea perpendicular a ellos, es decir, planos para los que la tensión cortante sea nula. En tales planos, el vector tensión habría de ser paralelo al vector director del plano, es decir,

$$[T]\,\mathbf{u} = \sigma\,\mathbf{u}$$

$$[T - \sigma\, I]\,\mathbf{u} = 0$$

donde $[I]$ es la matriz identidad; y desarrollando la última expresión se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{nx} - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{ny} - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{nz} - \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = 0$$

sistema homogéneo de ecuaciones lineales en α, β y γ, cuyo determinante ha de ser cero para que exista solución. Pero el determinante anterior igualado a cero es una ecuación de tercer grado en σ, por lo que se obtendrán tres valores, que se denominan tensiones principales, que no son otros que los valores propios de la matriz de tensiones. Una vez determinados los valores de las tensiones principales, las direcciones principales se obtienen resolviendo, para cada uno de ellos, la ecuación anterior (que proporcionará dos ecuaciones linealmente independientes), junto con la condición de vector unitario:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

Como dichas direcciones son las direcciones principales de la matriz, se tiene que son perpendiculares entre sí. Por tanto, existe un sistema de referencia, llamado principal, para el cual las tensiones tangenciales en los planos paralelos a los del sistema son nulas. Por consiguiente, si se designa por σ_1, σ_2 y σ_3 a las tensiones principales, el tensor de tensiones referido al sistema principal toma la forma:

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

En lo que sigue, se tomará siempre σ_1, σ_2 y σ_3 en orden decreciente, de forma que:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

En el caso de que dos de las tensiones principales obtenidas sean iguales, sólo una de las tres ecuaciones anteriores (para ese valor de σ) es linealmente independiente, con lo que se obtiene una infinidad de soluciones. Quiere decirse que cualesquiera dos direcciones perpendiculares entre sí contenidas en el plano perpendicular a la otra dirección principal, son direcciones principales. Análogamente, si los tres valores de las tensiones principales son iguales, cualquier triedro ortogonal con vértice en el punto considerado es sistema principal, y por tanto no existe tensión tangencial en ningún plano. Este caso se conoce como estado de presión hidrostática.

EJEMPLO 2.1

Dado el tensor de tensiones en un punto de un sólido elástico:

$$\begin{bmatrix} 40 & 10 & 10 \\ 10 & 30 & 0 \\ 10 & 0 & 30 \end{bmatrix}$$

en el que los valores vienen dados en MPa[1], calcular:

a) Las componentes del vector tensión, la tensión normal y la tensión tangencial en un plano cuyo vector director forma un ángulo de 45º con el eje x y de 60º con el eje y.

b) Las tensiones y direcciones principales.

[1] El pascal (Pa) es la unidad de presión en el sistema internacional de unidades, es decir, 1 Pa = $1\ \mathrm{N/m^2}$. Como medida de tensión o resistencia es demasiado pequeña, y acostumbra a utilizarse el megapascal (MPa), igual a 10^6 Pa. El sistema anglosajón utiliza el kpsi (*kilopound square inch*, es decir, kilolibra por pulgada cuadrada). La relación entre ambos es 1 kpsi = 6,89 MPa.