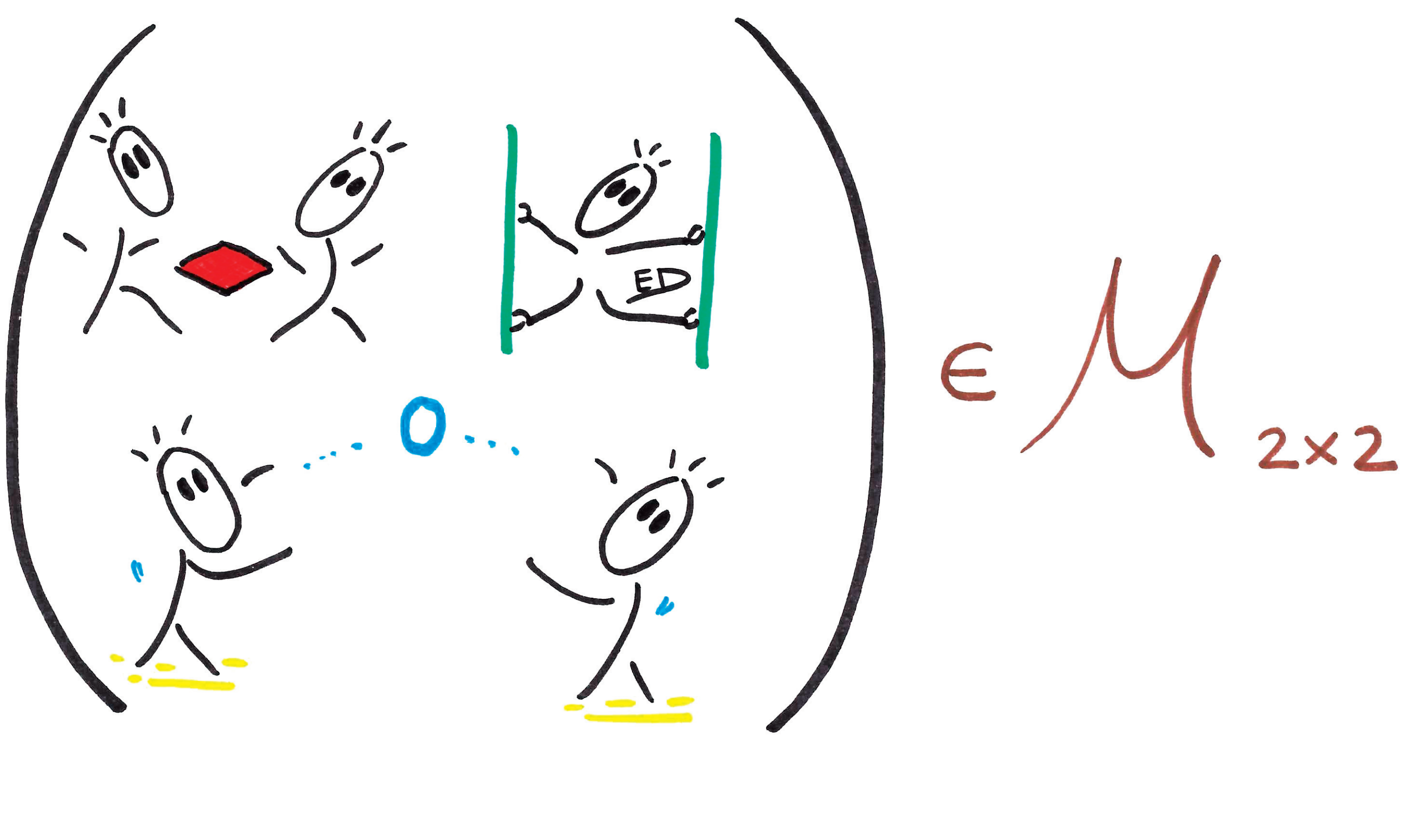
Índice

Unidad didáctica 1.
Operaciones algebraicas, matrices y determinantes



Resumen y objetivos

La primera unidad didáctica está dedicada a los conceptos de operación algebraica, matrices y determinantes. Estos contenidos engloban los conceptos básicos del **Álgebra**, disciplina que no es más que el estudio de las operaciones definidas sobre conjuntos. Una de sus motivaciones históricas ha sido la resolución y clasificación de sistemas lineales. De los estudios de bachillerato el alumno está familiarizado con el algoritmo de Gauss-Jordan de matrices, coloquialmente **hacer ceros por filas** (o columnas) que se lleva a cabo aplicando una serie de operaciones elementales (permutación de filas, multiplicación por un escalar, etc) a la matriz. Se trata en este tema de entender que la resolución de sistemas lineales es en parte un estudio de la operación producto en el conjunto de matrices, estrechamente ligado al algoritmo de Gauss-Jordan y a las denominadas **matrices elementales**. Empezamos dando los resultados más básicos de matrices, que van a ser una herramienta fundamental durante el curso. A continuación damos el concepto de **operación** y **estructura algebraica**, destacando la definición de **espacio vectorial** que va a ser la principal estructura algebraica que vamos a estudiar en el libro. El siguiente apartado está dedicado al **teorema de Gauss-Jordan**, en donde introducimos las matrices elementales. Además introducimos la noción de matriz escalonada y de rango de una matriz. En las dos últimas secciones establecemos el concepto de **determinante** y el teorema de caracterización de la **matriz inversa**, que prueba que una matriz tiene inversa si y solamente si su determinante es no nulo. Relacionamos dichos resultados con las operaciones elementales, lo que nos permite razonar las principales propiedades de los determinantes y el conocido algoritmo de cálculo de la inversa mediante operaciones elementales.

Objetivos

Al finalizar esta unidad didáctica, se pretende que el alumno sea capaz de:

- Verificar qué propiedades cumple una operación algebraica.
- Operar con matrices.
- Diferenciar los distintos tipos de matrices.

- Aplicar las propiedades más comunes para la traspuesta de una matriz.
- Calcular el determinante de una matriz cuadrada.
- Identificar las matrices elementales.
- Clasificar y resolver sistemas lineales aplicando el método de eliminación de Gauss-Jordan.
- Aplicar las propiedades de los determinantes para facilitar su cálculo.
- Calcular el rango de una matriz
- Reconocer si una matriz posee inversa y calcularla.

1 Operaciones algebraicas, matrices y determinantes

1.1 Matrices

Empezamos el capítulo dando la definición de matriz de números reales, sus propiedades y características más básicas. Las matrices de números reales son un objeto esencial dentro de las matemáticas y lo serán también durante este texto. En esta sección hacemos un recordatorio de los resultados más básicos.

Empezamos con la definición formal de matriz de números reales junto con las notaciones que vamos a utilizar.

Definición 1.1

Una **matriz de números reales de orden** $n \times m$ es una tabla de n filas y m columnas de números reales. A cada elemento de la matriz se le asigna una pareja (i, j) de números naturales, con $i = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., m$, de modo que podemos representar una matriz genérica por (a_{ij}), en donde a_{ij} representa el valor situado en la fila i y columna j, para $i = 1, 2, ..., n$ y $j = 1, 2, ..., m$, es decir

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Al conjunto de todas las matrices de n filas y m columnas lo denotaremos por $\mathcal{M}_{n\times m}$.

Definición 1.2

Una matriz se dice **cuadrada** si el número de filas coincide con el de las columnas, es decir $n = m$. En caso contrario, es decir, si n es distinto de m, la matriz se dice **rectangular**. Al conjunto de matrices cuadradas $\mathcal{M}_{n\times n}$ de orden n se les suele denotar simplemente por $\mathcal{M}_n$.

Ejemplo 1.1:

El conjunto de matrices de dos filas y tres columnas tiene la expresión general

$$\mathcal{M}_{2\times 3} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R} \right\},$$

y es un ejemplo de conjunto de matrices rectangulares. Ejemplo de matrices de dicho conjunto son

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}$$

o la matriz

$$(a_{ij}) = (i+j) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}.$$

Un ejemplo de conjunto de matrices cuadradas es el conjunto de las matrices de orden 2

$$\mathcal{M}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R},\, 1 \le i,j \le 2 \right\},$$

siendo un ejemplo de elemento de dicho conjunto la matriz

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2.$$

A la matriz I se le denomina matriz unidad y será de especial importancia a lo largo del curso. Otro ejemplo de matriz cuadrada de orden 2 sería la matriz

$$(i+3j) = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2.$$

Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times m}$, una **submatriz** de A es cualquier matriz de tamaño menor formada por un subconjunto de las filas y columnas de A. Por ejemplo, si consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

son submatrices suyas las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},\, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En el caso de A_1 la matriz está formada por la segunda y tercera filas y las dos primeras columnas,

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & -1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En el caso de A_2, la matriz está formada por la primera y cuarta filas completas

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Definición 1.3

En el conjunto $\mathcal{M}_{n\times m}$ de las matrices de orden $n \times m$ se define la **suma** y el **producto por un número real** $\lambda \in \mathbb{R}$ de la forma siguiente

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}), \qquad \lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij}).$$

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1.2:

Si tomamos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

su suma viene dada por

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Asimismo, el producto de A por el escalar 2, viene dado por

$$2A = 2\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Definición 1.4

Dadas dos matrices $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times m}$, $B = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{m\times p}$, en donde asumimos que el número de columnas de la primera sea igual al número de filas de la segunda, el **producto de A por B**, denotado por AB, es la matriz $C = (c_{ik}) \in \mathcal{M}_{n\times p}$ definida de la manera siguiente[a]

$$(c_{ik}) = (a_{ij})(b_{jk}) = (a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + ... + a_{im}b_{mk}) = \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk}\right).$$

[a]**Notación**. Por $\sum$ denotamos el sumatorio, que se utiliza para simplicar notación. Significa lo siguiente

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = x_1 + x_2 + ... + x_m.$$

Por ejemplo

$$\sum_{i=1}^{4} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30.$$

Ejemplo 1.3:

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3},$$

se observa que el número de columnas de A coincide con el número de filas de B, por lo que se puede realizar el producto AB,

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) & 1\cdot 2 + 2\cdot 4 & 1\cdot 3 + 2\cdot(-2) \\ 0\cdot 1 + 3\cdot(-1) & 0\cdot 2 + 3\cdot 4 & 0\cdot 3 + 3\cdot(-2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 10 & -1 \\ -3 & 12 & -6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}. \end{aligned}$$

En cambio, en sentido opuesto, el producto BA no tiene sentido, ya que el número de columnas de B no coincide con el filas de A.

En algunas referencias, se utiliza la notación $\times$ para denotar el producto de matrices, es decir, $AB = A \times B$.. Usaremos este símbolo cuando necesitemos referirnos a la operación.

En general, para cualquier tamaño, a la matriz

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & .... & 0 \\ 0 & 0 & .... & 0 \\ ... & ... & .... & ... \\ 0 & 0 & .... & 0 \end{pmatrix},$$

con todas sus entradas nulas la denominaremos **matriz nula**. Se verifican las siguientes propiedades, en donde todas las matrices tiene un tamaño adecuado que hace que la operación correspondiente tenga sentido.

Proposición 1.1

Se cumplen las siguientes propiedades:

- $A + B = B + A$.
- $A(BC) = (AB)C$.
- $AO = O$.
- $A(B + C) = AB + AC$.
- $(A + B)C = AC + BC$.
- $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1.4:

Tomemos por ejemplo las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Operando

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},$$

y

$$(A + B)C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & 8 & 14 \end{pmatrix}.$$

Por el otro lado

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 6 & 10 \end{pmatrix},$$

y

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Con lo que

$$AC + BC = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 6 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & 8 & 14 \end{pmatrix}.$$

Por tanto

$$(A + B)C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & 8 & 14 \end{pmatrix} = AC + BC,$$

como ya sabíamos por la penultima propiedad de la proposición anterior. Compruébense el resto de propiedades como ejercicio.

Otro concepto fundamental es el de matriz traspuesta, que es la matriz resultante de intercambiar filas por columnas.

Definición 1.5

Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$. Se llama **matriz traspuesta** de A a la matriz $A^T \in \mathcal{M}_{m\times n}$ cuyas columnas son las filas de A, es decir, si $A = (a_{ij})$, entonces $A^T = (a_{ji})$.

Se cumplen las siguientes propiedades.

Proposición 1.2

Sean A y B matrices de tamaño adecuado, se tienen las siguientes propiedades inmediatas.

- $A = (A^T)^T$.
- $(A + B)^T = A^T + B^T$.
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.
- $(AB)^T = B^T A^T$.

Ejemplo 1.5:

Sea las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

del ejemplo anterior. Se tiene que sus matrices traspuestas respectivas vienen dadas por

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \; B^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Compruébese que

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 10 & 12 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$$

y que efectivamente, teniendo en cuenta lo calculado en el ejemplo anterior,

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 10 & 12 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 10 & -1 \\ -3 & 12 & -6 \end{pmatrix}^T = (AB)^T.$$

Se deja comprobar al lector el resto de propiedades como ejercicio.

1.1.1 Matrices cuadradas

Sea $\mathcal{M}_n$ el conjunto de la matrices cuadradas de orden n que ya hemos introducido anteriormente. En este sección definimos los conceptos más usuales relacionados con este tipo de matrices.

Definición 1.6

Sea $A \in \mathcal{M}_n$. Definimos los siguientes tipos de matrices.

- A es una **matriz diagonal** si todos los elementos que no pertenecen a la diagonal principal son cero, es decir, $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.
- A es una **matriz simétrica** si $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $i, j = 1, 2, ..., n$. Es decir, si
$$A = A^T.$$

Un ejemplo de matriz diagonal de gran importancia es la matriz unidad I, ya mencionada anteriormente, y que es aquella matriz diagonal con unos en todos los elementos de la diagonal.

Definición 1.7

La matriz cuadrada de orden n cuya diagonal principal está formada por unos y el resto ceros se llama **matriz unidad** o **identidad** y se denota por

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Al igual que en el producto de números reales, al multiplicar cualquier matriz por la unidad se vuelve a obtener la misma matriz. Es decir, dada $A \in \mathcal{M}_n$ se tiene

$$IA = AI = A. \tag{1.1}$$

Veamos un ejemplo de todo lo anterior.

Ejemplo 1.6:

Sea la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2.$$

Es una matriz no simétrica ya que no coincide con su traspuesta

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq A.$$

En cambio la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3$$

es una matriz simétrica, ya que

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = B.$$

En el conjunto de matrices de orden 3, la matriz unidad viene dada por

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Compruébese que la propiedad (1.1) se verifica,

$$BI = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = B$$

y

$$IB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = B.$$

Una vez que tenemos una matriz unidad, podemos definir el inverso de la misma manera que en el producto de números reales.

Definición 1.8

Dada una matriz cuadrada $O \neq A \in \mathcal{M}_n$ no nula, diremos que $B \in \mathcal{M}_n$ es su **matriz inversa** si

$$BA = AB = I.$$

En general denotaremos la matriz inversa por $B = A^{-1}$.

La matriz inversa, si existe, es única. Una matriz cuadrada A se dice que es **regular** si existe su matriz inversa, y **singular** en el caso de que no exista.

Ejemplo 1.7:

La matriz inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

viene dada por

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ya que se verifica lo siguiente

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ A^{-1}A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para un número real no nulo $a \neq 0$, su inverso (multiplicativo) $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ siempre existe. En cambio, no toda matriz no nula $O \neq A \in \mathcal{M}_n$ tiene inversa. En secciones posteriores vamos a volver sobre esta cuestión, en particular vamos a ver métodos para calcular algorítmicamente la matriz inversa.

1.2 Operaciones y estructuras algebraicas

1.2.1 Definición de operación

Antes de introducir el concepto de **operación algebraica** necesitamos definir el concepto de producto cartesiano. Dados dos conjuntos M, N su **producto cartesiano** $M \times N$ (no confundir con el producto de matrices) viene dado por el conjunto de pares ordenados (m, n) de dichos conjuntos,

$$M \times N = \{(m, n) : m \in M, n \in N\}.$$

Por ejemplo, si $M = \{a, b, c\}$, $N = \{1, 2\}$, entonces

$$M \times N = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}.$$

Definición 1.9

Una **operación** o **ley de composición interna** $\diamond$ en un conjunto cualquiera M, es una **aplicación** del producto cartesiano $M \times M$ en M, es decir,

$$\begin{array}{rccc} \diamond : & M \times M & \to & M \\ & (a, b) & \mapsto & a \diamond b \end{array}$$

tal que que a cada par de elementos a, b de M le hace corresponder un elemento de M que designamos por $a \diamond b$.

Veamos varios ejemplos.

Ejemplo 1.8:

La suma usual $\diamond = +$ es una operación en el conjunto de los números naturales

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ..., n, ...\},$$

y de igual forma en el conjunto de los números enteros

$$\mathbb{Z} = \{..., -n, .., -2, -1, 0, 1, 2, ..., n, ...\}$$

y en el conjunto de los números reales[a]

$$\mathbb{R} = (-\infty, \infty).$$

Es decir, por ejemplo, la suma de un número natural con otro vuelve a dar un número natural. Y lo mismo pasa con los números enteros y los números reales. Igualmente, la operación producto usual $\diamond = \cdot$ es una operación sobre los mismos conjuntos.
En cambio, para el intervalo cerrado $M = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, la suma usual $\diamond = +$ no es una operación. Por ejemplo, se pueden tomar dos elementos de dicho conjunto

$$m_1 = 0.8 \in M, \; m_2 = 0.4 \in M$$

tal que su suma no pertenezca al mismo:

$$m_1 + m_2 = 1.2 \notin M = [0, 1].$$

Mientras que el producto $\diamond = \cdot$ sí es una operación sobre el conjunto $M = [0, 1]$, ya que el producto de dos números de $[0, 1]$ es claramente otro elemento de $[0, 1]$. Como ejemplo, si $m_1 = 0.4$, $m_2 = 0.8$, entonces

$$m_1 \cdot m_2 = 0.8 \cdot 0.4 = 0.32 \in M.$$

[a]Véase Sección 8.1 para una descripción detallada de los números reales y sus subconjuntos

1.3 Propiedades de una operación

Las operaciones se clasifican en función de las propiedades que verifiquen. A continuación definimos algunas de las propiedades más importantes.

Definición 1.10

Sea $\diamond$ una operación definida sobre un conjunto M.

- $\diamond$ es **conmutativa** si $a \diamond b = b \diamond a$ para todo $a, b \in M$.
- $\diamond$ es **asociativa** si $(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c)$ para todos $a, b, c \in M$.

- $\diamond$ posee **elemento neutro** $e \in M$ si $a \diamond e = e \diamond a = a$ para todos $a \in M$.

- Si $\diamond$ posee elemento neutro e, se dice que $a' \in M$ es el elemento **inverso** de a si

$$a \diamond a' = a' \diamond a = e.$$

Ejemplo 1.9:

Las operaciones usuales en los conjuntos de números $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{R}$, suma $+$ y producto $\cdot$, cumplen las propiedades de conmutatividad y asociatividad . De hecho, cuando operamos en dichos conjuntos de números aplicamos estas propiedades constantemente. El elemento neutro para la suma $\diamond = +$ es el cero $e = 0$, mientras que para el producto $\diamond = \cdot$ es la unidad $e = 1$. Los números naturales no tienen inverso ni con respecto de la suma, ni del producto. Por ejemplo si tomamos

$$a = 2 \in \mathbb{N},$$

su inverso respecto de la suma necesariamente verifica[a]

$$a' + 2 = 0 \Rightarrow a' = -2 \notin \mathbb{N},$$

pero $a' = -2$ no es un número natural, $a' \notin \mathbb{N}$.
En cambio todo número entero $a \in \mathbb{Z}$ sí tiene inverso respecto de la suma, dado por su opuesto $-a \in \mathbb{Z}$,

$$a + (-a) = 0,$$

pero no con respecto del producto. Por ejemplo, para el mismo número $a = 2$ el inverso necesariamente sería

$$\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$$

que no pertenece a $\mathbb{Z}$. Todo número real tiene inverso con respecto de la suma y, exceptuando el cero, con respecto del producto.

[a]**Notación**. Sea $\mathbf{A}$ un un conjunto de $\mathbb{R}$. Denotamos que un elemento $\mathbf{a}$ pertenece a $\mathbf{A}$ mediante la expresión $\mathbf{a}\in\mathbf{A}$. Del mismo modo, denotamos que $\mathbf{a}$ no pertenece a $\mathbf{A}$ mediante la expresión $\mathbf{a}\notin\mathbf{A}$.

Ejemplo 1.10:

Consideremos la operación

$$\begin{array}{rcl} \Diamond : \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ (n, m) & \longmapsto & n \Diamond m = |n - m| \end{array}$$

sobre el conjunto de los números naturales.
Efectivamente, $\Diamond$ es una operación sobre el conjunto de los números naturales, ya que $|n - m| \in \mathbb{N}$ para cualesquiera números naturales $n, m \in \mathbb{N}$ que tomemos. Además se cum-

plen las siguientes propiedades.

- $\diamond$ es conmutativa

$$n\diamond m = |n-m| = |-(n-m)| = |m-n| = m\diamond n.$$

- $e=0$ es el elemento neutro, ya que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\begin{aligned} n\diamond 0 &= |n-0| = n, \\ 0\diamond n &= |0-n| = n. \end{aligned}$$

- $\diamond$ no es asociativa. Si tomamos $a=1$, $b=2$, $c=3$, no se verifica la propiedad asociativa. Por un lado se tiene

$$(a\diamond b)\diamond c = (1\diamond 2)\diamond 3 = 1\diamond 3 = 2,$$

y por el otro

$$a\diamond (b\diamond c) = 1\diamond (2\diamond 3) = 1\diamond 1 = 0.$$

Con lo que

$$(1\diamond 2)\diamond 3 = 2 \neq 0 = 1\diamond (2\diamond 3).$$

Vamos a repasar una serie de operaciones sobre determinados conjuntos, que aparecerán constantemente a lo largo del texto. Comencemos, en primer lugar, por las operaciones definidas sobre el conjuntos de vectores de n componentes reales, que denotamos por $\mathbb{R}^n$ y viene dado por

$$\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}.$$

La primera operación a considerar es la **suma de vectores**.

Sobre el conjunto de los vectores de n componentes reales podemos definir una operación suma $+$ de manera natural. Para todos $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ definimos la suma $+$ por

$$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n).$$

Por ejemplo, si tomamos $\mathbf{x} = (1, 0, 2)$, $\mathbf{y} = (0, -1, 1) \in \mathbb{R}^3$ su suma viene dada por

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (1, 0, 2) + (0, -1, 1) = (1, -1, 3) \in \mathbb{R}^3.$$

$+$ es conmutativa. Es claro que

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \\ &= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, y_3 + x_3) \\ &= (y_1, y_2, y_3) + (x_1, x_2, x_3) \\ &= \mathbf{y} + \mathbf{x}. \end{aligned}$$

$+$ es asociativa. Para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, se tiene

$$\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}.$$

Por ejemplo, si tomamos $\mathbf{z} = (4,1,2)$ en $\mathbb{R}^3$, entonces por un lado

$$\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = (1,0,2) + [(0,-1,1)+(4,1,2)] = (1,0,2) + (4,0,3) = (5,0,5),$$

mientras que por el otro

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} = [(1,0,2) + (0,-1,1)] + (4,1,2) = (1,-1,3)+(4,1,2) = (5,0,5).$$

Existe elemento neutro dado por el **vector nulo** $e = \mathbf{0} = (0,...,0)$, ya que

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}.$$

Por ejemplo,

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = (1,0,2) + (0,0,0) = (1,0,2) = \mathbf{x}.$$

Todo elemento $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tiene inverso dado por el **vector opuesto**

$$-\mathbf{x} = (-x_1, ..., -x_n) \in \mathbb{R}^n$$

ya que

$$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Por ejemplo $-\mathbf{z} = (-4,-1,-2)$ y se tiene

$$\mathbf{z} + (-\mathbf{z}) = (4,1,2)+(-4,-1,-2) = (0,0,0) = \mathbf{0}.$$

Otro tipo de operaciones fundamentales, muy utilizadas en Álgebra y Cálculo, por ejemplo en la resolución de sistemas lineales, son las operaciones suma y producto sobre el conjunto de matrices. En la Proposición 1.1 hemos enumerado algunas de las propiedades más importantes de este tipo de operaciones. En las siguientes observaciones comentamos algunos de los aspectos más destacados para este caso.

La suma de matrices de números reales de cualquier tamaño es conmutativa, asociativa, y tiene elemento neutro dado por la matriz nula. Es consecuencia directa de las mismas propiedades de los números reales. Por ejemplo, si consideramos las matrices de orden 2×3

$$\mathcal{M}_{2\times 3} = \left\{ A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R},\, 1 \leq i \leq 2,\, 1 \leq j \leq 3 \right\},$$

su suma se puede escribir del siguiente modo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}.$$

$+$ es conmutativa y asociativa, sin más que aplicar a cada entrada de la matriz las propiedades correspondientes de los números reales. Por otro lado, el elemento neutro es

$$e = O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ya que

$$A + O = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = A.$$

Y siempre existe inverso (opuesto) de cualquier matriz A para la operación $+$ dado por

$$A' = -A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \end{pmatrix},$$

ya que claramente

$$A + A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

Hemos visto que el producto se define entre matrices de determinado tamaño, y por tanto la operación solamente tiene sentido entre ciertos tipos de matrices. En el caso de la matrices cuadradas $\mathcal{M}_n$, la operación producto siempre tiene sentido, verifica la propiedad de asociatividad, además de que existe elemento neutro dado por la matriz identidad. En cambio no es conmutativo en general. Para ver esto, consideremos el conjunto de la matrices cuadradas de orden 2

$$\mathcal{M}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

con el producto de matrices

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Como dijimos anteriormente puede comprobarse que el producto de matrices es asociativo. En cambio, el producto de matrices no es conmutativo. Por ejemplo, tomando

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por un lado se tiene

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

y por el otro

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con lo que

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = BA.$$

Tal como vimos en (1.1), existe elemento neutro dado por la matriz identidad

$$e = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ya que $AI = IA = A$, para todo $A \in \mathcal{M}_2$.

Un aspecto muy destacado del producto de matrices, es que no toda matriz no nula tiene inversa. Por ejemplo, la matriz anterior A no tiene inversa. Si existiese inversa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

entonces necesariamente se tiene que cumplir

$$AA^{-1} = I,$$

es decir[a]

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

lo que implica

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pero esta igualdad no tiene sentido, es imposible. Por ejemplo, igualando las coordenadas de la primera columna llegamos al absurdo

$$a + c = 1,\ a + c = 0.$$

1.3.1 Ley de composición externa

Existen otro tipo de operaciones que involucran dos conjuntos diferentes, por ejemplo cuando multiplicamos una matriz o un vector por un escalar. En este texto, y refiriéndonos a este tipo de operaciones, solamente consideraremos aquella en las que intervienen un determinado conjunto M y el conjunto de los números reales. En concreto, dado un conjunto M, se considera una aplicación $\cdot$ de $\mathbb{R} \times M$ en M, es decir,

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{R} \times M & \to & M \\ & (\lambda, a) & \mapsto & \lambda \cdot a \end{array}$$

A este tipo de aplicación se le denomina **operación** o**ley de composición externa**. Un ejemplo de esta clase de operación es el producto de un escalar por una matriz que ya vimos en la Definición 1.3. Otro es el producto de un escalar por un vector de $\mathbb{R}^n$. Asi defininimos el producto de un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ por un vector $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, que denotaremos simplemente por $\lambda\mathbf{x}$, como

$$\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n).$$

[a]**Notación.** Dadas dos expresiones matemáticas `A` y `B`, por `A`$\Rightarrow$ `B` denotaremos que `A` implica `B`. Por ejemplo,

$$x = \sqrt{2} \Rightarrow x^2 - 2 = 0.$$

Por `A`$\Leftrightarrow$`B`, denotaremos la doble implicación. Es decir, `A`$\Rightarrow$ `B` y `B`$\Rightarrow$ `A`. Por ejemplo,

$$x = \pm\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0.$$

Ejemplo 1.11:

Consideremos

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Tomando $\mathbf{x}$ =(2, −1), $\lambda = -2$ se tiene que

$$\lambda\mathbf{x} = -2(2, -1) = (-4, 2).$$

1.3.2 Estructuras algebraicas

Una **estructura algebraica** es un conjunto (no vacío) M en el que están definidas una o más operaciones que poseen determinadas propiedades. Un ejemplo de estructura algebraica es la de grupo que definimos a continuación.

Definición 1.11

Sea M un conjunto sobre el que hay definida una operación $\diamond$. Diremos que $(M, \diamond)$ es un grupo si se verifican las siguientes propiedades:

$\mathbf{a} \diamond (\mathbf{b} \diamond \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \diamond \mathbf{b}) \diamond \mathbf{c}$, para cualesquiera $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in M$.	*Ley asociativa*
Existe $\mathbf{e} \in M$ tal que $\mathbf{a} \diamond \mathbf{e} = \mathbf{e} \diamond \mathbf{a} = \mathbf{a}$.	*Existencia de elemento neutro*
Para cada $a \in M$, existe $\mathbf{a}' \in M$ tal que $\mathbf{a} \diamond \mathbf{a}' = \mathbf{e}$.	*Existencia de elemento inverso*

Un grupo se dice **conmutativo o abeliano** si además se verifica

$\mathbf{a} \diamond \mathbf{b} = \mathbf{b} \diamond \mathbf{a}$, para todo $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in \mathbf{M}$. *Ley conmutativa de la suma*

Ejemplo 1.12:

Por lo visto anteriormente, tenemos que los números enteros y los reales con la operación suma

$$(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{R}, +)$$

constituyen un grupo conmutativo.
Asimismo las matrices con la operación suma

$$(\mathcal{M}_{n\times m}, +)$$

constituyen grupo conmutativo.
Los números reales sin el cero[a] con la operación producto

$$(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$$

constituyen asimismo un grupo conmutativo. Mientras que la matrices cuadradas con la operación producto de matrices

$$(\mathcal{M}_n, \times)$$

constituyen un ejemplo de grupo no conmutativo para órdenes $n > 1$.

[a]**Notación.** $\mathbb{R}\backslash\{0\} = \{r \in \mathbb{R} : r \neq 0\}$ denota todos los números reales menos el cero. En general, $\backslash$ es el símbolo de diferencia de conjuntos. Es decir, dados conjuntos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, por $\mathbf{A}\backslash\mathbf{B}$ denotamos todos los elementos de $\mathbf{A}$ no pertenecientes a $\mathbf{B}$. Es decir,

$$\mathbf{A}\backslash\mathbf{B} = \{x \in \mathbf{A} : x \notin \mathbf{B}\}.$$

La principal estructura algebraica que estudiaremos a lo largo del curso será la de **espacio vectorial**. Avanzamos aquí su definición que estudiaremos con detenimiento en las siguientes unidades didácticas.

Definición 1.12

Sea un conjunto $\mathbb{V}$ dotado de una operación interna $+$ y una operación producto por escalar $\cdot$. Se dice que la terna $(\mathbb{V}, +, \cdot)$ es un **espacio vectorial** si cumple las siguientes propiedades:

- $(\mathbb{V}, +)$ es un grupo conmutativo.
- Además, para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}$ se tiene

$$\begin{array}{ll} \lambda \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{u} + \lambda \cdot \mathbf{v}. & \textit{Distributiva respecto a } + \textit{ de } \mathbb{V} \\ (\lambda + \mu) \cdot \mathbf{u} = \lambda \cdot \mathbf{u} + \mu \cdot \mathbf{u}. & \textit{Distributiva respecto a } + \textit{ de } \mathbb{R} \\ \lambda(\mu \cdot \mathbf{u}) = (\lambda\mu) \cdot \mathbf{u}. & \textit{Asociativa respecto al producto por} \text{ un escalar de } \mathbb{V} \\ 1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}. & \end{array}$$

Observación 1.1

- $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, el conjunto de vectores de n componentes con su suma usual $+$ y el producto por un escalar $\cdot$ es un espacio vectorial.
- $(\mathcal{M}_{m\times n}, +, \cdot)$ el conjunto de matrices de números reales de orden $m \times n$ con la suma y producto por un escalar verifican también la estructura de espacio vectorial.

Por ello, solemos referirnos a dichas operaciones globalmente como **operaciones vectoriales.** Junto con el producto de matrices son las operaciones involucradas en la **resolución y clasificación de sistemas lineales** y como veremos posteriormente tienen una especial relevancia en el curso.

1.4 Métodos de eliminación de Gauss

Los **métodos de eliminación de Gauss** para resolver sistemas lineales, coloquialmente **hacer ceros por filas** (o columnas), buscan reducir la matriz asociada del sistema lineal a una matriz equivalente más sencilla, aplicando una serie de operaciones elementales (permutación de filas, multiplicación por un escalar, etc) a la matriz. Se trata en esta sección de entender desde una perspectiva práctica que dicho algoritmo no es más que la multiplicación reiterada por determinadas matrices denominadas elementales.

1.4.1 Operaciones y matrices elementales

Definimos en primer lugar las operaciones elementales.

Definición 1.13

Las **operaciones elementales por fila** son:

- Intercambiar dos filas ($F_i \longleftrightarrow F_j$), $i \neq j$.
- Multiplicar una fila por un escalar $\lambda \neq 0$ ($F_i \to \lambda F_i$).
- Sumar a una fila otra fila distinta multiplicada por un escalar ($F_i \to F_i + \lambda F_j$, $j \neq i$).

Dado un sistema lineal, las operaciones elementales sobre su matriz asociada nos permiten obtener otro sistema equivalente más fácil de resolver, como veremos más adelante. Veamos un ejemplo de cómo aplicar operaciones elementales consecutivamente sobre una matriz.

Ejemplo 1.13:

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

y apliquemos diversas operaciones elementales para encontrar una matriz que tengo ceros por debajo de la diagonal

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A' \xrightarrow{F_3 \to F_3 - \frac{3}{2}F_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = A''$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 - \frac{1}{2}F_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A''' \xrightarrow{F_1 \to \frac{1}{2}F_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A''''$$

La matriz resultado de este algoritmo,

$$A'''' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es una matriz con todo ceros por debajo de la diagonal, estando la diagonal formada únicamente por unos y ceros. Dicha matriz es, como veremos, una **matriz escalonada** equivalente a A.

El proceso anterior se corresponde a **multiplicar por la izquierda** por una determinada **matriz elemental** en cada etapa. Veamos caso por caso.

Ejemplo 1.14:

Intercambiar dos filas, por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_1 \leftrightarrow F_2}{} A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

se corresponde a la multiplicación

$$A' = F_{12}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

en donde

$$F_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observamos que F_{12} es la matriz resultado de intercambiar las filas 1 y 2 en la matriz identidad.

Definición 1.14

Se define la **matriz elemental** F_{ij} como la matriz resultado de permutar las filas i y j en la matriz identidad.

Ejemplo 1.15:

Multiplicar una fila por un escalar, por ejemplo

$$A''' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_1 \to \frac{1}{2}F_1}{} A'''' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

se corresponde a la multiplicación

$$A'''' = F_1\left(\frac{1}{2}\right)A''' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en donde

$$F_1\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $F_1\left(\frac{1}{2}\right)$ es la matriz resultante de sustituir en la matriz identidad el elemento correspondiente a la posición $(1,1)$ de su diagonal por el número $\lambda = \frac{1}{2}$.

Definición 1.15

Se define la **matriz elemental** $F_i(\lambda)$ la matriz resultado de sustituir en la matriz identidad, la entrada (i,i) por el número λ.

Ejemplo 1.16:

Sumarle a una fila otra multiplicada por un escalar, por ejemplo

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \underset{F_3 \to F_3 - \frac{3}{2}F_1}{} \quad A'' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

se corresponde a la multiplicación

$$A'' = F_{31}\left(-\frac{3}{2}\right)A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

en donde

$$F_{31}\left(-\frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es el resultado de añadir a la matriz identidad el número real $-\frac{3}{2}$ en la entrada $(3,1)$. $F_{31}\left(\frac{-3}{2}\right)$ equivale a realizar la transformación $F_3 \to F_3 - \frac{3}{2}F_1$ sobre la matriz identidad.

Definición 1.16

Se define la **matriz elemental** $F_{ij}(\lambda)$ como la matriz resultado de añadir a la matriz identidad el número real λ en la entrada (i,j).

Ejemplo 1.17:

La transformación mediante cuatro operaciones elementales que vimos en el Ejemplo 1.13, de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a

$$A'''' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

se corresponde a multiplicar por cuatro matrices elementales siguiendo el orden dado

$$A'''' = F_1\left(\frac{1}{2}\right) F_{32}\left(-\frac{1}{2}\right) F_{31}\left(-\frac{3}{2}\right) F_{12}A.$$

A la matriz, producto de matrices elementales,

$$P = F_1\left(\frac{1}{2}\right) F_{32}\left(-\frac{1}{2}\right) F_{31}\left(-\frac{3}{2}\right) F_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

se le suele denominar **matriz de paso** y verifica que

$$PA = A''''.$$

Efectivamente

$$\begin{aligned} PA &= \left(F_1\left(\frac{1}{2}\right) F_{32}\left(-\frac{1}{2}\right) F_{31}\left(-\frac{3}{2}\right) F_{12}\right) A \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A''''. \end{aligned}$$

Además, la matriz de paso P se puede determinar aplicando las mismas propiedades elementales a la matriz identidad

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 - \frac{3}{2}F_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 - \frac{1}{2}F_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \to \frac{1}{2}F_1} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} = P$$

Observación 1.2

Téngase en cuenta que las transformaciones elementales no solamente se aplican a matrices cuadradas, sino a cualquier matriz rectangular. Por ejemplo, consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y apliquemos las siguientes transformaciones elementales

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_2 \to F_2 - 2F_1}{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -3 \end{pmatrix} = A'$$

$$\underset{F_2 \to \frac{1}{3} F_2}{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} = A''$$

En este caso la matriz de paso viene dada por

$$P = F_2\left(\frac{1}{3}\right) F_{21}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Se comprueba que efectivamente

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} = A''.$$

Aunque nuestro interés primordial está puesto en las operaciones elementales por filas, es evidente que también podemos considerar las correspondientes **operaciones elementales por columnas**

- Intercambiar dos columnas ($C_i \longleftrightarrow C_j$), $i \neq j$.
- Multiplicar una columna por un escalar $\lambda \neq 0$ ($C_i \to \lambda C_i$).
- Sumar a una columna otra columna distinta multiplicada por un escalar ($C_i \to C_i + \lambda C_j$), $j \neq i$.

En este caso, las operaciones elementales por columnas se corresponden con multiplicar por la derecha las correspondientes matrices elementales[b]

$$\begin{aligned} &C_{ij} = F_{ij}^T = F_{ij}, \\ &C_i(\lambda) = F_i(\lambda)^T = F_i(\lambda), \\ &C_{ij}(\lambda) = F_{ij}(\lambda)^T = F_{ji}(\lambda). \end{aligned}$$

Por ejemplo, consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz que permuta las columnas 1 y 2 ($C_1 \longleftrightarrow C_2$) viene dada por la matriz

$$C_{12} = F_{12}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[b]Se puede demostrar razonando mediante operaciones por filas aplicando la propiedad del producto de matrices traspuestas

$$(AB)^T = B^T A^T$$