

# ÍNDICE

<b>Prefacio</b>	<b>17</b>
Organización de la Unidad Didáctica . . . . .	17
Cómo utilizar el libro . . . . .	18
Objetivos docentes . . . . .	18
<b>1. Introducción al modelado y la simulación</b>	<b>19</b>
1.1. Introducción . . . . .	23
1.2. Conceptos fundamentales . . . . .	24
1.2.1. Sistema, experimento y modelo . . . . .	24
1.2.2. Niveles en el conocimiento de los sistemas . . . . .	27
1.2.3. Marco formal para el modelado y la simulación . . . . .	29
1.2.4. Clasificaciones de los modelos matemáticos . . . . .	32
1.3. Modelado y simulación de tiempo discreto . . . . .	35
1.3.1. Descripción de modelos de tiempo discreto . . . . .	36
1.3.2. Simulación de modelos de tiempo discreto . . . . .	38
1.3.3. Autómatas celulares . . . . .	38
1.4. Modelado y simulación de eventos discretos . . . . .	43
1.4.1. Modelado orientado a la planificación de eventos . . . . .	44
1.4.2. Modelado orientado a los procesos . . . . .	48
1.4.3. Modelado de una oficina de atención al público . . . . .	49
1.5. Pasos en un estudio de simulación . . . . .	55

1.5.1.	Definición del problema y planificación del proyecto . . . . .	57
1.5.2.	Definición del sistema y formulación del modelo . . . . .	59
1.5.3.	Diseño de los experimentos . . . . .	63
1.5.4.	Datos de entrada . . . . .	64
1.5.5.	Traducción del modelo . . . . .	64
1.5.6.	Verificación y validación del modelo . . . . .	65
1.5.7.	Experimentación y análisis de los resultados . . . . .	66
1.5.8.	Documentación y aplicación de los resultados . . . . .	67
1.6.	Análisis de datos: introducción a R . . . . .	68
1.6.1.	El espacio de trabajo . . . . .	70
1.6.2.	Estructuras de datos . . . . .	72
1.6.3.	Gráficos . . . . .	75
1.6.4.	Manejo básico de los datos . . . . .	78
1.6.5.	Valor NA (Not Available) . . . . .	79
1.6.6.	Conversión del tipo de datos . . . . .	80
1.6.7.	Control del flujo . . . . .	81
1.6.8.	Definición de funciones . . . . .	82
1.7.	Lecturas recomendadas . . . . .	82
1.8.	Ejercicios de autocomprobación . . . . .	84
1.9.	Soluciones de los ejercicios . . . . .	87
<b>2.</b>	<b>Modelado mediante DEVS</b>	<b>99</b>
2.1.	Introducción . . . . .	103
2.2.	Modelos DEVS atómicos . . . . .	103
2.2.1.	Especificación formal . . . . .	104
2.2.2.	Comportamiento de modelos DEVS atómicos . . . . .	105
2.2.3.	Práctica del modelado . . . . .	109
2.3.	Modelos DEVS compuestos . . . . .	121

2.3.1.	Especificación formal . . . . .	121
2.3.2.	Comportamiento de modelos DEVS acoplados . . . . .	123
2.3.3.	Práctica del modelado . . . . .	125
2.4.	Simulación de modelos DEVS . . . . .	128
2.4.1.	Algoritmo DEVS-simulador . . . . .	130
2.4.2.	Algoritmo DEVS-coordinador . . . . .	133
2.4.3.	Algoritmo DEVS-coordinador-raíz . . . . .	137
2.5.	Lecturas recomendadas . . . . .	139
2.6.	Ejercicios de autocomprobación . . . . .	140
2.7.	Soluciones de los ejercicios . . . . .	148
<b>3.</b>	<b>Modelado con Arena</b>	<b>165</b>
3.1.	Introducción . . . . .	169
3.2.	Comenzando con Arena . . . . .	169
3.3.	Modelado de los recursos . . . . .	180
3.3.1.	Planificación de la capacidad . . . . .	180
3.3.2.	Fallos en los recursos . . . . .	182
3.3.3.	Utilización de los recursos . . . . .	183
3.4.	Encapsulado y prueba de circuitos . . . . .	184
3.4.1.	Descripción del funcionamiento del sistema . . . . .	185
3.4.2.	Modelado del funcionamiento del sistema . . . . .	186
3.4.3.	Definición del experimento . . . . .	194
3.4.4.	Ejecución de la simulación . . . . .	194
3.4.5.	Planificación de la capacidad de la Zona de Retrabajado . . . . .	196
3.4.6.	Averías en la Zona de Encapsulado y Prueba . . . . .	201
3.5.	Modelado detallado . . . . .	207
3.5.1.	Rechazo (balking) . . . . .	208
3.5.2.	Conjuntos de objetos . . . . .	209

3.5.3.	Variables . . . . .	210
3.5.4.	Expresiones . . . . .	211
3.5.5.	Submodelos . . . . .	212
3.5.6.	Costes . . . . .	212
3.6.	Lecturas recomendadas . . . . .	213
3.7.	Ejercicios de auto comprobación . . . . .	214
3.8.	Soluciones de los ejercicios . . . . .	221
<b>4.</b>	<b>Modelado de las entradas aleatorias</b>	<b>249</b>
4.1.	Introducción . . . . .	253
4.2.	Conceptos básicos de probabilidad . . . . .	256
4.2.1.	El significado de “probabilidad” . . . . .	256
4.2.2.	Probabilidad condicionada . . . . .	258
4.2.3.	El teorema fundamental de la probabilidad . . . . .	258
4.2.4.	El concepto de variable aleatoria . . . . .	259
4.2.5.	Probabilidad acumulada y densidad de probabilidad . . . . .	260
4.2.6.	Cuantiles y mediana . . . . .	261
4.2.7.	Media, varianza y desviación estándar . . . . .	261
4.2.8.	Estimadores de la media y la varianza . . . . .	262
4.2.9.	Teorema del límite central . . . . .	264
4.2.10.	Intervalos de confianza para la media . . . . .	264
4.2.11.	Intervalos de confianza para la varianza de una distribución normal . . . . .	269
4.3.	Distribuciones de probabilidad . . . . .	272
4.3.1.	Parámetros de las familias de distribuciones teóricas continuas	272
4.3.2.	Distribuciones empíricas continuas . . . . .	273
4.3.3.	Distribuciones empíricas discretas . . . . .	275
4.3.4.	Desplazamiento y truncado de distribuciones . . . . .	275

4.4.	Independencia y homogeneidad de los datos experimentales . . . . .	277
4.4.1.	Análisis de la independencia de los datos experimentales . . . . .	277
4.4.2.	Análisis de la homogeneidad de los datos experimentales . . . . .	278
4.5.	Tarea I: Selección de la familia de distribuciones . . . . .	279
4.5.1.	Consideraciones teóricas . . . . .	279
4.5.2.	Estadísticos . . . . .	281
4.5.3.	Histogramas . . . . .	284
4.5.4.	Gráficas cuantil-cuantil . . . . .	286
4.6.	Tarea II: Estimación de los parámetros . . . . .	289
4.7.	Tarea III: Medida de la bondad del ajuste . . . . .	292
4.8.	Selección de la distribución en ausencia de datos . . . . .	294
4.9.	Procesos estocásticos de llegada . . . . .	297
4.9.1.	Procesos de Poisson . . . . .	298
4.9.2.	Procesos de Poisson no estacionarios . . . . .	299
4.9.3.	Procesos de Poisson compuestos . . . . .	301
4.9.4.	Modelado usando Arena . . . . .	302
4.10.	Modelado de las entradas usando Arena . . . . .	304
4.11.	Modelado de las entradas usando R . . . . .	308
4.11.1.	Funciones estadísticas . . . . .	308
4.11.2.	Histogramas . . . . .	310
4.11.3.	Gráficas Q-Q . . . . .	311
4.11.4.	Ajuste de los datos . . . . .	312
4.11.5.	Medida de la bondad del ajuste . . . . .	313
4.12.	Lecturas recomendadas . . . . .	313
4.13.	Ejercicios de autocomprobación . . . . .	315
4.14.	Soluciones de los ejercicios . . . . .	317
<b>5.</b>	<b>Generación de las entradas aleatorias</b>	<b>325</b>

5.1.	Introducción . . . . .	329
5.2.	Generación de números aleatorios . . . . .	330
5.2.1.	Generadores físicos . . . . .	331
5.2.2.	Generadores aritméticos . . . . .	335
5.2.3.	Generadores congruenciales lineales . . . . .	338
5.2.4.	Generadores congruenciales lineales mixtos . . . . .	340
5.2.5.	Generadores congruenciales lineales multiplicativos . . . . .	342
5.2.6.	Otros generadores congruenciales . . . . .	344
5.2.7.	Generadores combinados . . . . .	345
5.2.8.	Generadores de Tausworthe . . . . .	348
5.3.	Tests empíricos . . . . .	349
5.4.	Métodos para generar observaciones de variables aleatorias . . . . .	353
5.4.1.	Método de la transformación inversa . . . . .	353
5.4.2.	Composición . . . . .	358
5.4.3.	Convolución . . . . .	358
5.4.4.	Método de aceptación/rechazo . . . . .	359
5.5.	Observaciones de variables aleatorias continuas . . . . .	360
5.5.1.	Uniforme . . . . .	360
5.5.2.	Exponencial . . . . .	360
5.5.3.	Normal . . . . .	361
5.5.4.	Lognormal . . . . .	361
5.5.5.	Triangular . . . . .	361
5.5.6.	Distribución empírica . . . . .	362
5.6.	Observaciones de variables aleatorias discretas . . . . .	363
5.6.1.	Distribución Bernoulli . . . . .	363
5.6.2.	Distribución discreta uniforme . . . . .	363
5.6.3.	Distribución binomial . . . . .	363

5.6.4.	Distribución geométrica . . . . .	364
5.6.5.	Distribución negativa binomial . . . . .	364
5.6.6.	Distribución de Poisson . . . . .	364
5.6.7.	Distribución empírica . . . . .	365
5.7.	Generación de procesos de llegada . . . . .	366
5.7.1.	Proceso de Poisson estacionario . . . . .	366
5.7.2.	Proceso de Poisson no estacionario . . . . .	366
5.7.3.	Proceso de Poisson con llegadas en grupo . . . . .	367
5.8.	Lecturas recomendadas . . . . .	368
5.9.	Ejercicios de autocomprobación . . . . .	369
5.10.	Soluciones de los ejercicios . . . . .	372
<b>6.</b>	<b>Análisis de los resultados de la simulación</b>	<b>379</b>
6.1.	Introducción . . . . .	383
6.2.	Comportamiento transitorio y estacionario . . . . .	384
6.3.	Simulaciones con condición de finalización . . . . .	388
6.4.	Simulaciones en el estacionario . . . . .	390
6.4.1.	Método gráfico de Welch . . . . .	390
6.4.2.	Media de la distribución en el estacionario . . . . .	394
6.5.	Intervalos de confianza para varias magnitudes . . . . .	396
6.6.	Comparación entre dos sistemas . . . . .	398
6.7.	Comparación entre más de dos sistemas . . . . .	399
6.7.1.	Comparación con un estándar . . . . .	400
6.7.2.	Comparación de todos con todos . . . . .	401
6.8.	Análisis usando Arena . . . . .	402
6.8.1.	Simulación con terminación . . . . .	402
6.8.2.	Comparación de dos modelos . . . . .	404
6.8.3.	Comparación entre más de dos modelos . . . . .	406

6.8.4. Simulación en el estacionario . . . . .	410
6.9. Análisis usando R . . . . .	414
6.10. Lecturas recomendadas . . . . .	416
6.11. Ejercicios de autocomprobación . . . . .	417
6.12. Soluciones de los ejercicios . . . . .	419
<b>7. Diseño de experimentos y optimización</b>	<b>421</b>
7.1. Introducción . . . . .	425
7.2. Objetivos, respuestas y factores . . . . .	427
7.2.1. Objetivos del experimento . . . . .	427
7.2.2. Selección de las respuestas . . . . .	428
7.2.3. Selección de los factores experimentales . . . . .	430
7.3. Diseño experimental factorial completo . . . . .	432
7.3.1. Efectos principales . . . . .	433
7.3.2. Interacciones de dos factores . . . . .	433
7.3.3. Interacción entre más de dos factores . . . . .	438
7.3.4. Intervalos de confianza . . . . .	438
7.3.5. Modelado de la respuesta . . . . .	439
7.4. Diseño experimental factorial fraccional . . . . .	442
7.4.1. Diseño experimental $2^{k-p}$ . . . . .	442
7.4.2. Modelado de la respuesta . . . . .	443
7.5. Optimización . . . . .	445
7.5.1. Metodología de la superficie de respuesta . . . . .	445
7.5.2. Optimización usando Arena . . . . .	448
7.6. Lecturas recomendadas . . . . .	451
7.7. Ejercicios de autocomprobación . . . . .	452
7.8. Soluciones de los ejercicios . . . . .	455

<b>APÉNDICES</b>	<b>461</b>
<b>A. Distribuciones de probabilidad continuas</b>	<b>461</b>
Uniforme . . . . .	463
Exponencial . . . . .	464
Gamma . . . . .	465
Weibull . . . . .	466
Normal . . . . .	467
Lognormal . . . . .	468
Beta . . . . .	469
Triangular . . . . .	470
Equivalencias entre distribuciones . . . . .	471
Relaciones entre distribuciones . . . . .	472
<b>B. Distribuciones de probabilidad discretas</b>	<b>473</b>
Bernoulli . . . . .	475
Uniforme discreta . . . . .	476
Binomial . . . . .	476
Geométrica . . . . .	478
Binomial negativa . . . . .	479
Poisson . . . . .	480
Equivalencias entre distribuciones . . . . .	481
Relaciones entre distribuciones . . . . .	481
<b>Índice alfabético</b>	<b>483</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>489</b>

## 2.1. INTRODUCCIÓN

DEVS (*Discrete Event system Specification*) es una especificación para la descripción de modelos de eventos discretos que fue propuesta a mediados de la década de 1970 por el profesor Bernard P. Zeigler. La especificación proporciona un marco formal sencillo y elegante para describir el **comportamiento** de los modelos atómicos mediante la planificación de eventos y también la **estructura** de los modelos compuestos mediante el acoplamiento modular de sus componentes.

Dos décadas más tarde Alex Chung-Hen Chow y Bernard P. Zeigler realizaron una revisión del formalismo, eliminando algunas de sus restricciones. Con el fin de distinguir entre ambas especificaciones, la propuesta en los años 1970 pasó a denominarse **DEVS clásico** y la nueva especificación de los años 1990 se denominó **DEVS paralelo**. En este tema nos limitaremos al formalismo DEVS clásico.

## 2.2. MODELOS DEVS ATÓMICOS

La interfaz de un modelo DEVS está compuesta por cero, uno o varios puertos de entrada y por cero, uno o varios puertos de salida. El modelo recibe datos en sus puertos de entrada y envía datos a través de sus puertos de salida. La recepción de uno de estos datos se denomina **evento de entrada** y el envío **evento de salida**.

Un **dato** es un *paquete de información*, que puede ser simple (de tipo numérico o cadena de caracteres) o una estructura tan compleja como se desee. Al definir el modelo debe especificarse el tipo de información que transportan los datos recibidos o enviados por cada puerto.

La descripción de los modelos DEVS clásico se realiza suponiendo que *los eventos se disparan de uno en uno*. Esto no significa que no puedan producirse varios eventos en un mismo instante de tiempo. Significa que esos eventos son ejecutados en cadena, uno tras otro, de manera que en cada paso de la ejecución de la cadena de eventos se ejecuta un único evento.

El estado del modelo está descrito mediante el valor de sus variables de estado. El cambio en el estado del modelo se denomina **transición de estado**. En el instante de la transición de estado las variables de estado cambian instantáneamente su valor: en ese instante cada variable de estado tiene un valor “antiguo” y un valor “nuevo” (que puede ser igual al valor antiguo o diferente). Un modelo DEVS experimenta un *número finito de transiciones de estado en cualquier intervalo acotado de tiempo*. Las transiciones del estado pueden producirse bien porque han sido planificadas por

el propio modelo, o bien pueden ser debidas a un evento de entrada. En el primer caso el cambio de estado se produce en una **transición interna** y en el segundo en una **transición externa**. Todo ello se explica con detalle a continuación.

### 2.2.1. Especificación formal

La especificación de un modelo DEVS atómico consiste en la **tupla** (*secuencia ordenada de objetos*) siguiente:

$$\text{DEVS} = \langle X, S, Y, \delta_{int}, \delta_{ext}, \lambda, ta \rangle \quad (2.1)$$

donde cada objeto de la tupla tiene el significado siguiente:

$X$	Conjunto de entrada.
$S$	Conjunto de posibles estados.
$Y$	Conjunto de salida.
$\delta_{int} : S \rightarrow S$	Función de transición interna.
$\delta_{ext} : Q \times X \rightarrow S$	Función de transición externa.
$\lambda : S \rightarrow Y$	Función de salida.
$ta : S \rightarrow \mathbb{R}_{0,\infty}^+$	Función de avance de tiempo.

La Tupla (2.1) contiene tres conjuntos y cuatro funciones. Para cada función se ha indicado el tipo de su argumento o argumentos, y el tipo de su valor de retorno. A continuación se explica el significado de cada objeto de la tupla.

- El **conjunto de entrada**  $X$  está compuesto por todas las posibles parejas  $(pI, v)$ , donde  $pI$  es el nombre de un puerto de entrada y  $v$  es un posible dato recibido en dicho puerto. El conjunto  $X$  se especifica indicando el nombre de cada puerto de entrada y el tipo de los datos que pueden ser recibidos en dicho puerto.
- El conjunto  $S$  está compuesto por todos los posibles estados del modelo. El **estado** del modelo está descrito por un cierto conjunto de **variables de estado**, de modo que *cada combinación de valores de las variables de estado define un estado del modelo*. Así pues, el **conjunto**  $S$  es el *producto cartesiano de los posibles valores de las variables de estado del modelo*. El **rango** de una variable de estado, es decir, el *conjunto de valores que puede tomar la variable*,

puede ser un conjunto discreto finito o infinito, o un conjunto continuo acotado o no acotado.

- El **conjunto de salida**  $Y$  está compuesto por todas las posibles parejas (pO,  $v$ ), donde pO es el nombre de un puerto de salida y  $v$  es un posible dato enviado por dicho puerto. El conjunto  $Y$  se especifica indicando el nombre de cada puerto de salida y el tipo de los datos que pueden ser enviados a través de dicho puerto.
- La **función de transición interna**,  $\delta_{int} : S \rightarrow S$ , admite como argumento un estado del modelo y devuelve un estado del modelo.
- La **función de transición externa**,  $\delta_{ext} : Q \times X \rightarrow S$ , tiene dos argumentos de entrada: un elemento del estado total del modelo y un elemento (pI,  $v$ ) del conjunto  $X$ . Devuelve un estado del modelo. Los elementos del conjunto  $Q$ , llamado **estado total**, están formados por parejas de valores ( $s, e$ ), donde  $s$  es un estado del modelo y  $e$  es el tiempo que ha transcurrido desde la anterior transición del estado.
- La **función de salida**,  $\lambda : S \rightarrow Y$ , admite como argumento un estado del modelo y devuelve un elemento (pO,  $v$ ) del conjunto  $Y$ . La función también puede devolver el conjunto vacío, que se representa  $\emptyset$ .
- La **función de avance de tiempo**,  $ta : S \rightarrow \mathbb{R}_{0,\infty}^+$ , tiene como argumento un estado del modelo y devuelve un número real positivo, incluyendo el cero e infinito. Este número es el tiempo máximo que el modelo puede permanecer de manera continuada en el estado pasado como argumento a la función.

### 2.2.2. Comportamiento de modelos DEVS atómicos

Además de los objetos de la tupla, para poder simular el modelo debe especificarse en qué instante de tiempo comienza la simulación, en qué estado total se encuentra el modelo en dicho instante inicial y cuál es la condición de finalización de la simulación. Esta información no forma parte del modelo, sino del **experimento** que va a realizarse sobre él. Si el modelo contiene parámetros, especificar el valor de éstos también forma parte de la definición del experimento. Un **parámetro** es una variable cuyo valor permanece constante a lo largo de la simulación.

La simulación del modelo DEVS atómico se realiza mediante un algoritmo denominado **DEVS-simulador**. En este algoritmo se emplean las variables  $t_{last}$  y  $t_{next}$ , en las cuales se almacena el instante en el cual se produjo la última transición