

ÍNDICE GENERAL

PRÓLOGO	13
Tema 1. INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL	15
1. RESUMEN DE RESULTADOS TEÓRICOS	15
2. EJERCICIOS RESUELTOS	24
2.1. Sistemas lineales	24
2.2. Matrices.	30
2.3. Determinantes. Aplicaciones	33
Tema 2. ESPACIOS VECTORIALES	49
1. RESUMEN DE RESULTADOS TEÓRICOS	49
2. EJERCICIOS RESUELTOS	54
2.1. Subespacios. Combinaciones lineales. Sistemas de generadores . . .	54
2.2. Dependencia e independencia lineal	62
2.3. Bases. Dimensión. Coordenadas	66
2.4. Cambio de base	73
2.5. Rango. Base de un subespacio generado	80
2.6. Ecuaciones de un subespacio	83
2.7. Operaciones con subespacios. Suma directa	89

Tema 3. APLICACIONES LINEALES	97
1. RESUMEN DE RESULTADOS TEÓRICOS	97
2. EJERCICIOS RESUELTOS	104
2.1. Aplicaciones lineales.	104
2.2. Aplicaciones lineales y matrices	109
2.3. Matriz de una aplicación lineal al cambiar la base.	119
2.4. Matrices equivalentes y matrices semejantes.	126
2.5. Valores propios y vectores propios. Diagonalización.	128
 Tema 4. FUNCIONES DE UNA VARIABLE	 147
1. RESUMEN DE RESULTADOS TEÓRICOS	147
2. TABLA DE DERIVADAS	164
3. EJERCICIOS RESUELTOS	165
3.1. El conjunto de los números reales. Sucesiones.	165
3.2. Límites de funciones reales	173
3.3. Funciones continuas	177
3.4. Derivadas	186
3.5. Regla de L'Hôpital.	190
3.6. Funciones derivables.	193
3.7. Crecimiento, extremos, convexidad	203
3.8. Asíntotas	211
3.9. Representación gráfica de una función.	216
3.10. Puntos fijos.	226
3.11. Polinomio de Taylor	232

Tema 5. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES	237
1. RESUMEN DE RESULTADOS TEÓRICOS	237
2. EJERCICIOS RESUELTOS	250
2.1. El conjunto $\mathbf{R}^n$	250
2.2. Funciones reales de dos o más variables. Límites.	256
2.3. Funciones continuas	262
2.4. Derivada según un vector. Funciones diferenciables	267
2.5. Extremos de una función	289
 Tema 6. INTEGRACIÓN. APLICACIONES	 311
1. RESUMEN DE RESULTADOS TEÓRICOS	311
2. TABLA DE INTEGRALES	317
3. EJERCICIOS RESUELTOS	318
3.1. Integral indefinida	318
3.2. Integral definida. Áreas.	331
3.3. Integrales impropias	338
3.4. Integrales dobles	342
3.5. Volúmenes	352
3.6. Cálculo de límites mediante integrales.	359
3.7. Integración numérica	361

TEMA 1

Sistemas lineales

1.1. Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es un conjunto de expresiones algebraicas de la forma

[illegible]

donde x_i son las incógnitas, a_{ij} los coeficientes y b_i los términos independientes ($i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$). Los coeficientes y los términos independientes son números reales. El sistema (S) se llama homogéneo cuando todos los términos independientes son cero.

Los números reales $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$ forman una solución del sistema si verifican todas sus ecuaciones. Resolver un sistema es hallar todas sus soluciones.

1.2. Dos sistemas son *equivalentes* si tienen las mismas soluciones.

1.3. Sean $E_1, E_2, \dots, E_k$ ecuaciones de un sistema, se dice que la ecuación E es *combinación lineal* de $E_1, E_2, \dots, E_k$ si existen números reales $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ tales que $E = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \dots + \alpha_k E_k$.

1.4. Transformaciones de equivalencia. Un sistema se transforma en otro equivalente si

- (a) se cambia el orden de las ecuaciones,
- (b) se multiplica una ecuación por un número distinto de cero,
- (c) se suma a una ecuación un múltiplo de otra.

1.5. Otras propiedades de equivalencia.

- (a) Si un sistema tiene la ecuación nula, ésta se puede suprimir.
- (b) Si a un sistema se le añade una ecuación que es combinación lineal de las otras, resulta un sistema equivalente.
- (c) Si en un sistema una ecuación es combinación lineal de las otras, se puede suprimir y resulta un sistema equivalente. En particular, si dos ecuaciones son proporcionales, una de ellas se puede suprimir.
- (d) Si se reemplaza una ecuación por una combinación lineal de todas las ecuaciones en el que el coeficiente de la reemplazada es no nulo, resulta un sistema equivalente (esta propiedad es el fundamento del método de reducción).

1.6. Teniendo en cuenta el número de soluciones, se dice que un sistema es

- (a) *compatible determinado* si tiene una única solución (n es el nº de incógnitas),
- (b) *compatible indeterminado* si tiene infinitas soluciones y
- (c) *incompatible* si no tiene solución.

Por tanto, se dice que es *compatible* si tiene solución.

1.7. Un sistema es *escalonado* si en toda ecuación no nula el número de términos nulos que preceden al primer término no nulo es mayor que el de la anterior.

1.8. Método de Gauss. Consiste en transformar el sistema en otro equivalente que sea escalonado, mediante las transformaciones de equivalencia de los apartados 1.4 y 1.5 (véanse los ejercicios 1.2-1.4). Al finalizar el proceso, el sistema escalonado tendrá r ecuaciones no nulas (e independientes), las nulas se suprimen, entonces:

- (a) Si hay alguna ecuación de la forma $0 = b$, con $b \neq 0$, el sistema es incompatible.
- (b) En caso contrario, el sistema es compatible:
 - Si $r = n$, la solución es única.
 - Si $r < n$, hay infinitas soluciones que dependen de $n - r$ parámetros.

Matrices**1.9. Una matriz de dimensión (u orden) $m \times n$ es una tabla rectangular de mn**

números dispuestos en m filas y n columnas:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Al designar una matriz genérica, como la anterior, cada término tiene dos subíndices que indican la fila y la columna a las que pertenece. Así, por ejemplo, a_{23} es el que está en la segunda fila y tercera columna. Para simplificar, la matriz anterior se denota $A = (a_{ij})$.

1.10. Dos matrices son iguales si tienen la misma dimensión y son iguales todos los elementos que ocupan la misma posición.

1.11. Tipos de matrices:

(a) *Matriz fila* es aquella que tiene sólo una fila, por tanto de dimensión $1 \times n$.

(b) *Matriz columna* es aquella que tiene sólo una columna, por tanto de dimensión $m \times 1$.

(c) *Matriz escalonada* por filas es una matriz tal que en cada fila el número de ceros que preceden al primer elemento no nulo es mayor que en la precedente, o de otro modo, empezando por la izquierda, en cada fila hay más ceros que en la anterior.

(d) *Matriz cuadrada* es aquella que tiene igual número de filas que de columnas. La *diagonal principal* son los elementos de la forma a_{ii} . Una matriz cuadrada es *triangular* si todos los elementos debajo de la diagonal principal son cero. Una matriz cuadrada es *diagonal* si todos los elementos que no están en la diagonal principal son cero.

(e) *Matriz simétrica* es aquella matriz cuadrada que tiene los elementos simétricos a la diagonal principal iguales, es decir, $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i \neq j$.

(f) *Matriz identidad* es aquella matriz cuadrada que tiene en la diagonal principal unos y el resto cero. Por ejemplo, las matrices identidad de orden 2 y 3 son, respectivamente:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.12. Suma de matrices. La suma de dos matrices A y B de la misma dimensión es otra matriz de la misma dimensión que se obtiene sumando elemento a elemento. Ejemplo: suma de dos matrices 2×3 :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ a'_1 + b'_1 & a'_2 + b'_2 & a'_3 + b'_3 \end{pmatrix}.$$

1.13. El producto de una matriz A por un número real k es otra matriz de la misma dimensión que se obtiene multiplicando cada elemento de A por el número k . Ejemplo:

$$k \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ ka'_1 & ka'_2 & ka'_3 \end{pmatrix}.$$

1.14. El producto de una matriz fila por una matriz columna con el mismo número de elementos es un número que se obtiene como sigue:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n.$$

1.15. Producto de matrices. Para multiplicar dos matrices A y B , el número de columnas de A ha de ser igual al número de filas de B . Entonces, si $A = (a_{ij})_{m \times p}$ y $B = (b_{ij})_{p \times n}$, la matriz producto $C = A \cdot B = AB = (c_{ij})$ es la matriz $m \times n$ cuyos elementos son

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj},$$

esto es, el elemento (i, j) de la matriz C se obtiene multiplicando la fila i de A por la columna j de B según la regla 1.14.

1.16. Propiedades de la suma de matrices y del producto por un número:

- (1) Conmutativa: $A + B = B + A$.
- (2) Asociativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$.
- (3) Elemento neutro: la matriz nula $\mathbf{0}$ (todos sus elementos son cero) cumple $A + \mathbf{0} = A$.
- (4) Elemento opuesto: toda matriz A tiene una matriz opuesta $-A$, que se obtiene cambiando de signo todos los elementos de A y cumple que $A + (-A) = \mathbf{0}$.

(5) Distributiva de escalares respecto de la suma de matrices: $k(A + B) = kA + kB$.

(6) Distributiva respecto de la suma de escalares: $(k + h)A = kA + hA$.

(7) Asociativa mixta: $k(hA) = (kh)A$.

(8) El número 1 es el elemento unidad: $1 \cdot A = A$.

1.17. Propiedades del producto de matrices:

(1) Asociativa: $A(BC) = (AB)C$.

(2) Distributiva:

-por la izquierda: $A(B + C) = AB + AC$

-por la derecha: $(B + C)D = BD + CD$.

(3) Asociativa entre números y matrices: $(hA)(kB) = (hk)(AB)$.

(4) Elemento identidad: $I_m A = A$, $A I_n = A$ para toda $A \in M_{m \times n}$.

Observación: El producto de matrices no cumple la propiedad conmutativa, esto quiere decir que hay parejas de matrices tales que $AB \neq BA$. Esto no impide que existan parejas de matrices que sí conmutan.

1.18. En el conjunto $M_{n \times n}$ de las matrices cuadradas de orden n , el producto es una ley interna que cumple las propiedades anteriores 1.16-1.17, además hay elemento neutro para el producto: la matriz identidad de orden n $I = I_n$ que cumple $A \cdot I = A$ y $I \cdot A = A$ para toda matriz $A \in M_{n \times n}$.

1.19. Matriz inversa. Se dice que la matriz cuadrada A es *invertible* o *regular* o que tiene inversa, si existe una matriz A^{-1} tal que $AA^{-1} = I$ y $A^{-1}A = I$. La matriz A^{-1} se llama inversa de A . Si existe, es única.

Propiedades: (1) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, (2) $(A^{-1})^{-1} = A$.

1.20. Matriz traspuesta de A es la matriz A^t que se obtiene a partir de A cambiando filas por columnas, esto es, las columnas de A^t son las filas de A .

Propiedades:

(1) $(A + B)^t = A^t + B^t$.

(2) $(kA)^t = kA^t$.

(3) $(AB)^t = B^t A^t$.

$$(4) (A^{-1})^t = (A^t)^{-1}.$$

(5) Se tiene que A es simétrica si y sólo si $A = A^t$.

1.21. Se llama *rango* de una matriz A al número de filas linealmente independientes. Se denota $\text{rang}(A)$.

Teorema del rango: En cualquier matriz, el número de filas linealmente independientes coincide con el número de columnas linealmente independientes¹. Según esto, el rango de una matriz es el número de filas o de columnas linealmente independientes.

El rango de una matriz escalonada es igual al número de filas no nulas.

1.22. *Transformaciones elementales.* Las siguientes transformaciones aplicadas a una matriz permiten obtener otra que tiene el mismo rango:

(1) Intercambiar de posición dos filas entre sí.

(2) Multiplicar una fila por un número distinto de cero.

(3) Sumar a una fila un múltiplo de otra: $F_j \rightarrow F_j + kF_i$.

(4) Suprimir una fila que sea nula, proporcional a otra o combinación lineal de otras.

(5) Las cuatro propiedades anteriores son ciertas también cambiando las palabras fila y filas por columna y columnas, respectivamente.

Las propiedades anteriores nos permiten calcular el rango de una matriz por el método de Gauss.

Determinantes. Aplicaciones

1.23. *Determinantes de orden 2.* Dada la matriz cuadrada de segundo orden $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, se llama determinante de A al número real

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Dados dos vectores $\bar{a} = (a_1, a_2)$ y $\bar{b} = (b_1, b_2)$ de $\mathbb{R}^2$, se llama determinante de $\bar{a}$

¹ El concepto de independencia lineal se estudia con detalle en el Tema 2

y $\bar{b}$ al determinante de la matriz 2×2 cuyas filas son (a_1, a_2) y (b_1, b_2) , esto es,

$$\det(\bar{a}, \bar{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

1.24. Determinantes de orden 3. Dada la matriz cuadrada de tercer orden $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, se llama determinante de A al número real

$$\begin{aligned} \det(A) = |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} \\ &\quad - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}. \end{aligned}$$

Para recordar su expresión se utiliza el esquema de la Figura 1.1.

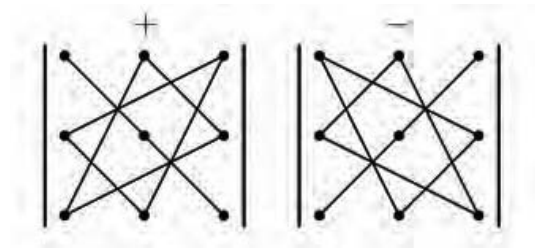


Figura 1.1. Regla de Sarrus

Dados tres vectores $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ y $\bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$ de $\mathbb{R}^3$, se llama determinante de $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$ al determinante de la matriz 3×3 cuyas filas son las componentes de dichos vectores, esto es:

$$\begin{aligned} \det(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2. \end{aligned}$$

1.25. Propiedades de los determinantes:

- (1) El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta: $|A| = |A^t|$.
- (2) Si una fila o columna es suma de dos, entonces el determinante es suma de dos determinantes que tienen en esa fila o columna los primeros y segundos

sumandos, respectivamente, y en las demás los mismos elementos que el determinante inicial:

$$\det(\bar{a} + \bar{d}, \bar{b}, \bar{c}) = \det(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) + \det(\bar{d}, \bar{b}, \bar{c}) \quad \text{o}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 + d_1 & a_2 + d_2 & a_3 + d_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

(3) Si se multiplican todos los elementos de una fila (o columna) por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número:

$$\det(k\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = k \det(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \quad \text{o} \quad \begin{vmatrix} ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

(4) Si se permutan dos filas (o columnas), el determinante cambia de signo:

$$\det(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = -\det(\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}) \quad \text{o} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

(5) Si una fila (o columna) es toda de ceros, el determinante vale 0:

$$\det(\bar{a}, \bar{b}, \bar{0}) = 0.$$

(6) Si dos filas (o columnas) son iguales o proporcionales, el determinante es 0:

$$\det(\bar{a}, \bar{a}, \bar{b}) = 0 \quad \text{y} \quad \det(\bar{a}, k\bar{a}, \bar{b}) = 0.$$

(7) Si una fila (o columna) es combinación lineal de las restantes filas (columnas), el determinante es 0: $\det(\bar{a}, \bar{b}, \alpha\bar{a} + \beta\bar{b}) = 0$. Y recíprocamente, si un determinante es 0, tiene una fila y una columna que es combinación lineal de las demás. Dicho de otro modo: si $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ son vectores de $\mathbb{R}^3$, entonces $\bar{a}, \bar{b}$ y $\bar{c}$ son linealmente independientes si y sólo si $\det(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \neq 0$.

(8) Si a una fila (o columna) se le suma un múltiplo de otra, el determinante no varía: $\det(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \det(\bar{a}, \bar{b} + k\bar{a}, \bar{c})$.

(9) El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de los determinantes de las dos matrices:

$$|A B| = |A| |B|.$$

1.26. Si en una matriz seleccionamos k filas y k columnas, los elementos en los que se cruzan forman una submatriz cuadrada de orden k . El determinante de esa submatriz se llama *menor de orden k* de la matriz inicial.

1.27. Si en una matriz cuadrada $n \times n$ destacamos un elemento a_{ij} , al suprimir su fila y su columna se obtienen una submatriz $(n-1) \times (n-1)$. Su determinante es un menor de orden $n-1$ que se llama *menor complementario* del elemento a_{ij} y se designa por α_{ij} . Se llama *adjunto* de a_{ij} al número $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}$, es decir, al menor complementario precedido del signo $+$ o $-$ según que la suma $i+j$ de los subíndices sea par o impar, respectivamente.

1.28. *Desarrollo de un determinante por una fila o columna.* El determinante de una matriz cuadrada es igual a la suma de los elementos de una fila o columna cualquiera, multiplicados por sus adjuntos correspondientes. Por ejemplo, el desarrollo por la primera fila es:

$$\det(A) = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \cdots + a_{1n} A_{1n}.$$

1.29. *Cálculo del rango de una matriz por determinantes.* El rango de una matriz es el máximo orden de sus menores no nulos. Esto significa que $\text{rang}(A) = k$ si y sólo si existe un menor de orden k no nulo y todos los menores de orden $k+1$ son cero. Esta propiedad se puede simplificar de la siguiente forma:

$\text{rang}(A) = k$ si y sólo si existe un menor M_k de orden k no nulo y todos los orlados de orden $k+1$ de ese menor son cero.

Un orlado de orden $k+1$ de M_k se obtiene añadiendo una fila y una columna de A que no estén en M_k . Por ejemplo, si la matriz A tiene 3 filas F_1, F_2 y F_3 y 4 columnas C_1, C_2, C_3 y C_4 y un menor no nulo de orden 2 M_2 es el formado por las dos primeras filas y columnas, esto es, $M_2 = (F_1, F_2; C_1, C_2)$, entonces los orlados de orden 3 serían $(F_1, F_2, F_3; C_1, C_2, C_3)$ y $(F_1, F_2, F_3; C_1, C_2, C_4)$ (y no hay más). Si A tuviera 4 filas habría otros dos orlados más, cambiando en los anteriores F_3 por F_4 : $(F_1, F_2, F_4; C_1, C_2, C_3)$ y $(F_1, F_2, F_4; C_1, C_2, C_4)$.

1.30. Sea A una matriz cuadrada. Entonces A tiene inversa (es regular) si y sólo si $|A| \neq 0$. En este caso, la inversa A^{-1} viene dada por la fórmula

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A)^t,$$

siendo $\text{Adj}(A)$ la matriz adjunta de A que se obtiene al sustituir cada elemento a_{ij} de A por su adjunto correspondiente A_{ij} .

1.31. Teorema de Rouché-Fröbenius. La condición necesaria y suficiente para que tenga solución el sistema

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

es que el rango de la matriz de los coeficientes, A , coincida con el rango de la matriz ampliada, A^* , siendo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Es decir, el sistema (S) tiene solución $\Leftrightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A^*)$. Además, en este caso, el número de parámetros de los que depende la solución es igual al número de incógnitas (n) menos el rango de A .

1.32. Un sistema de ecuaciones lineales es un *sistema de Cramer* si el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas n y el determinante de la matriz de los coeficientes A es distinto de cero.

Regla de Cramer: Todo sistema de Cramer tiene solución única y ésta viene dada por:

$$x_1 = \frac{\det(b, c_2, \dots, c_n)}{\det(c_1, c_2, \dots, c_n)}, \quad x_2 = \frac{\det(c_1, b, \dots, c_n)}{\det(c_1, c_2, \dots, c_n)}, \dots, \quad x_n = \frac{\det(c_1, c_2, \dots, b)}{\det(c_1, c_2, \dots, c_n)},$$

siendo $c_1, c_2, \dots, c_n$ las columnas de la matriz A y b la columna de los términos independientes, por lo tanto $\det(A) = \det(c_1, c_2, \dots, c_n)$.

2. EJERCICIOS RESUELTOS

2.1. Sistemas lineales

Ejercicio 1.1. Resuélvase el sistema escalonado

$$\begin{cases} 3x + y - z = 9 \\ y + 3z = -5 \\ 2z = -4 \end{cases}$$

Solución. Primero se halla z en la tercera ecuación: $z = -2$. Se sustituye en la segunda y se obtiene y : $y - 6 = -5 \Rightarrow y = 1$. Por último, se sustituyen en la primera ecuación los valores de y y z y se halla x : $3x + 1 + 2 = 9 \Rightarrow x = 2$. Como hay solución única $(2, 1, -2)$, el sistema es compatible determinado.

A este procedimiento se le llama *sustitución hacia atrás*. Los sistemas lineales, en general, se resuelven aplicando las transformaciones de equivalencia 1.4, convirtiéndolos en escalonados. Veamos cómo se procede en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 1.2. Resuélvase el siguiente sistema por el *método de Gauss* y clasifíquese:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = -2 \\ 2x - 5y - z = -2 \\ -3x + 7y + 2z = 4 \end{cases}$$

Solución. Si se parte de la primera ecuación como ecuación base y se elimina la x en la segunda ecuación y en la tercera, la primera transformación de equivalencia sería multiplicar la primera ecuación por -2 y sumarla a la segunda (véase 1.4(c)). La segunda transformación de equivalencia es multiplicar por 3 la primera ecuación y sumarla a la tercera. Estas dos transformaciones se indican como sigue:

$$\begin{aligned} E_2 &\rightarrow E_2 + (-2) \cdot E_1, \\ E_3 &\rightarrow E_3 + 3 \cdot E_1. \end{aligned}$$

Se pueden hacer en un sólo paso y resulta el sistema

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = -2 \\ y - 5z = 2 \\ -2y + 8z = -2 \end{cases}$$

Ahora si se usa la segunda ecuación como ecuación base, se multiplica por 2 y se suma a la tercera ($E_3 \rightarrow E_3 + 2E_2$), resulta ya un sistema escalonado que se resuelve por sustitución hacia atrás como hemos visto en el ejercicio anterior:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = -2 \\ y - 5z = 2 \\ -2z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -9 \\ y = -3 \\ z = -1 \end{cases} \quad (1.1)$$

Como hay solución única, el sistema es compatible determinado.