Métodos Matemáticos II - Grado en Física
Apuntes de teoría espectral
Curso 2013-2014

Carlos Fernández González

Departamento de Física de los Materiales - UNED

Introducción

La teoría espectral surge del intento de buscar soluciones de ecuaciones del tipo

$$Av = \lambda v \tag{1}$$

para un operador A en un espacio vectorial. Aquellos valores λ para los cuales existe una solución distinta de la trivial[1] se llaman autovalores, que se estudiaron en el caso finitodimensional en la asignatura de Álgebra del primer curso del Grado. Esos son los primeros tipos de 'valores espectrales' a estudiar.

Esta pregunta viene junto con otra naturalmente ligada a ella: si denotamos por $\mathbb{I}$ al operador identidad, ¿existe el inverso del operador $A - \lambda\mathbb{I}$? Efectivamente la ecuación (1) tiene solución no trivial si y sólo si el operador $A - \lambda\mathbb{I}$ no es inyectivo. Por tanto, la respuesta a esta última pregunta es la misma: existe ese operador inverso siempre que λ no sea un autovalor.

Sin embargo, el estudio de este operador inverso puede traer varios problemas consigo que darán lugar a nuevos 'valores espectrales', dependiendo de si la inversa de $A - \lambda\mathbb{I}$ no es continua, o lo es pero no está definida en un conjunto satisfactorio.

La teoría espectral es muy importante en Matemáticas y en Física. El conocimiento del espectro – autovalores y no autovalores – y de los espacios asociados a los valores espectrales de un operador da mucha información sobre él. El ejemplo más importante son los teoremas de descomposición espectral. Y su estudio es esencial en diversidad de problemas, como los problemas de frontera de Sturm y Liouville, o la teoría de ecuaciones integrales de Fredholm.

Las aplicaciones en Física son múltiples, yendo mas allá de las implicaciones que tiene en la teoría de Sturm-Liouville y el tratamiento de ecuaciones en derivadas parciales, en la teoría de ecuaciones integrales, y en otras partes de las Matemáticas de gran relevancia para la Física. Por ejemplo, el espectro de los operadores autoadjuntos – u observables fisicos – determina el conjunto de posibles resultados de las medidas. Los espectros determinan los posibles modos de vibración de las ondas. Etc.

En la exposición de resultados siempre nos referiremos a espacios complejos separables, pero en algunos ejemplos usaremos espacios reales. Tampoco consideraremos el caso trivial $E = \{0\}$, que debería ser excluído explícitamente en algunos de los enunciados. Y siempre que llamemos operador a una función ésta será lineal.

Los resultados de las secciones 3 y 4 se referirán siempre a operadores acotados, pero nótese que las definiciones y algunos resultados de las secciones 1 y 2 son válidos para operadores en general. Algunos resultados de las secciones 3 y 4 también son válidos para operadores en general, pero su definición y demostración requieren mucho más trabajo, empezando por la definición de operador no acotado que no es del todo trivial.

Usaremos indistintamente las notaciones Av u $A(v)$ para referirnos a la imagen del vector v bajo el operador A.

[1] $A0 = \lambda 0$ siempre se satisface para cualquier valor de λ.

Notación no introducida en los apuntes

$\varnothing$ = conjunto vacío
$\mathcal{B}(E)$ = espacio de operadores acotados en un espacio normado E
$\ell_2 = \ell_2(\mathbb{N})$ = espacio de sucesiones convergentes en norma $\|\cdot\|_2$.
$\langle\cdot,\cdot\rangle$ = producto escalar, lineal en la primera entrada y antilineal en la segunda.
$\overline{S}$ = adherencia o clausura de un conjunto S.
$\mathbb{I}$ = operador identidad.
$\mathcal{D}$ = dominio.
$\mathcal{R}$ = rango o imagen.
$A - B = \{x \in A, x \notin B\}$.
$L^2(S)$ = espacio de funciones medibles en S con $\|\cdot\|_2$ acotada.
$\ker(A)$ = núcleo de la aplicación lineal A.
$\operatorname{span}\{S\}$ = espacio vectorial generado por los vectores de S, usando únicamente combinaciones lineales finitas de elementos de S.
$\oplus$ = suma directa

1. Resolvente y espectro.

Como comentamos en la introducción, la teoría espectral surge de la pregunta sobre la existencia del operador $A-\lambda I$ para diversos valores de λ dado un operador A. Vayamos a partir de aquí con las primeras definiciones.

Definición 1.1 (Operador resolvente). Sea E un espacio normado, y $A : \mathcal{D}(E) \to E$ un operador en E con dominio $\mathcal{D} \subseteq E$. Si $A-\lambda I$ tiene inversa la denotaremos por $R_\lambda(A) = (A-\lambda I)^{-1}$, y a este operador[2] lo llamaremos **operador resolvente** de A asociado a λ. Usualmente lo llamaremos únicamente resolvente.

Nótese que el dominio del operador resolvente debe coincidir con el rango del operador original, y el rango del operador resolvente debe ser el dominio del operador original,

$$\mathcal{R}(R_\lambda(A)) = \mathcal{D}(A)\ ,\ \mathcal{D}(R_\lambda(A)) = \mathcal{R}(A).$$

Pero no sólo la existencia de este operador nos va a interesar, sino también, en caso de que exista, cuándo es continuo o no, y cuándo su dominio no es lo suficientemente grande (cuándo el dominio no es denso en X). De estas preguntas nace la siguiente definición, distinguendo los valores para los que el operador resolvente tiene muy buenas propiedades de aquellos para los que no las tiene todas.

Definiciones 1.2 (Valor regular, conjunto resolvente, espectro y radio espectral). Sea E un espacio normado, y $A : \mathcal{D}(E) \to E$ un operador en E con dominio $\mathcal{D} \subseteq E$. Un **valor regular** – *regular value* – de A es un número complejo tal que:
(R1) el operador resolvente $R_\lambda(A) = (A-\lambda I)^{-1}$ existe,
(R2) $R_\lambda(A)$ es continuo – o acotado[3] –,
(R3) $R_\lambda(A)$ está definido en un subconjunto denso en E.
Llamaremos **conjunto resolvente** – *resolvent set* – al conjunto de valores regulares, y lo denotaremos por $\rho(A)$. Llamaremos **espectro** – *spectrum* – al complementario en $\mathbb{C}$ del conjunto resolvente, y lo denotaremos por $\sigma(A)$. Por tanto $\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A)$.

[2] La inversa de $A - \lambda\mathbb{I}$, si existe, ha de ser necesariamente lineal por ser A lineal.
[3] La equivalencia entre acotación y continuidad en operadores lineales ya ha sido vista previamente el curso.

El **radio espectral** – *spectral radius* – es el valor $r_\sigma(A) = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|$. Es decir, el radio del disco cerrado más pequeño que contiene todo el espectro, o ∞ si no hay tal disco.

Cada una de las tres 'patologías' anteriores divide el espectro en tres partes.

Definiciones 1.3 (Espectros puntual, continuo y residual). Sea λ un valor del espectro de un operador A.

i) El **espectro puntual** – *point spectrum* – está formado por aquellos valores del espectro para los que no se verifica la condición (R1). Denotaremos al espectro puntual por $\sigma_p(A)$, y a sus elementos los llamaremos **autovalores** –*eigenvalues*.

ii) El **espectro continuo** – *continuous spectrum* – está constituido por aquellos valores del espectro para los que se verifica la condición (R1) pero no se verifica (R2). Denotaremos al espectro continuo por $\sigma_c(A)$.

iii) El **espectro residual** – *residual spectrum* – está formado por aquellos valores del espectro para los que se verifican las condiciones (R1) y (R2) pero no se verifica (R3). Denotaremos al espectro residual por $\sigma_r(A)$.

Claramente de la definición, el espectro se divide de manera disjunta en sus componentes puntual, continua y residual:

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A).$$

Veamos un primer ejemplo sencillo.

Ejemplo 1.4. Sea $A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ definido por

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Sus autovalores se pueden calcular con la ayuda del polinomio característico,

$$p(A) = \det(A - \lambda\mathbb{I}) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6.$$

Y el espectro puntual es $\sigma_p = \{1, 2, 3\}$.

En el caso finitodimensional todo el espectro es puntual, por lo que el estudio de autovalores es suficiente. Veámoslo en el siguiente resultado.

Proposición 1.5. *Sea E un espacio vectorial de dimensión n, y $A : E \to E$ un operador en él. Entonces, $\sigma(A) = \sigma_p(A)$.*

Demostración. Si $R_\lambda(A)$ existe para algún valor λ, esta resolvente ha de ser necesariamente continua ya que todos los operadores lineales en espacios finitodimensionales son acotados, y tienen que estar definidos en todo el espacio por dimensionalidad. Por tanto, un valor λ sólo puede estar en el espectro si no existe la resolvente para ese valor. $\square$

Con este resultado podemos completar el estudio del ejemplo anterior, pues sabemos ahora que $\sigma_c(A) = \sigma_r(A) = \varnothing$, $\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{1, 2, 3\}$ y $\rho(A) = \mathbb{C} - \sigma(A) = \mathbb{C} - \{1, 2, 3\}$.

Veamos ahora algunos ejemplos en espacios de dimensión infinita.

EJEMPLO 1.6. Dado el operador $A : \ell_2 \to \ell_2$, definido como

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots) = (ix_1, x_3, x_2, 2x_4, 0, 0, \dots),$$

calculemos su espectro.

Empecemos calculando los autovalores, estudiando para qué valores $\lambda \in \mathbb{C}$ la ecuación $Av = \lambda v$ tiene solución distinta de la trivial. Esta ecuación se traduce en el sistema de infinitas ecuaciones

$$\begin{cases} ix_1 = \lambda x_1 \\ x_2 = \lambda x_3 \\ x_3 = \lambda x_2 \\ 2x_4 = \lambda x_4 \\ x_5 = 0 \\ x_6 = 0 \\ \dots \end{cases},$$

que tiene soluciones no triviales para

$$\begin{aligned} \lambda = i &: v_i = (1, 0, 0, 0, \dots) = e_1 \\ \lambda = 1 &: v_1 = (0, 1, 1, 0, 0, 0, \dots) = e_2 + e_3 \\ \lambda = -1 &: v_{-1} = (0, 1, -1, 0, 0, 0, \dots) = e_2 - e_3 \\ \lambda = 2 &: v_2 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots) = e_4 \\ \lambda = 0 &: v_0 = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots) = e_5 \end{aligned}$$

.

Por tanto, el espectro puntual es $\sigma_p(A) = \{0, 1, -1, i, 2\}$.

Construyamos la resolvente para los valores de λ que no están en el espectro puntual, y veamos si es o no acotada. En primer lugar explicitemos la forma que tiene $A - \lambda\mathbb{I}$:

$$(A - \lambda\mathbb{I})(x_n) = ((i - \lambda)x_1, x_3 - \lambda x_2, x_2 - \lambda x_3, (2 - \lambda)x_4, -\lambda x_5, -\lambda x_6, \dots).$$

Entonces su inversa será

$$R_\lambda(A)(x_n) = (A - \lambda\mathbb{I})^{-1}(x_n) = \left(\frac{x_1}{i - \lambda}, \frac{x_3 + \lambda x_2}{1 - \lambda^2}, \frac{x_2 + \lambda x_3}{1 - \lambda^2}, \frac{x_4}{2 - \lambda}, -\frac{x_5}{\lambda}, -\frac{x_6}{\lambda}, \dots\right).$$

De esta expresión también se puede ver claramente que únicamente cuando $\lambda \in \{0, -1, 1, i, 2\}$ la inversa no está definida.

Veamos ahora si la resolvente es continua, viendo si es acotada.

$$\|R_\lambda(A)(x_n)\|_2 = \left\|\left(\frac{x_1}{i - \lambda}, \frac{x_3 + \lambda x_2}{1 - \lambda^2}, \frac{x_2 + \lambda x_3}{1 - \lambda^2}, \frac{x_4}{2 - \lambda}, -\frac{x_5}{\lambda}, -\frac{x_6}{\lambda}, \dots\right)\right\|_2 \le$$

$$\le \left\|\left(\frac{x_1}{i - \lambda}, \frac{x_3}{1 - \lambda^2}, \frac{x_2}{1 - \lambda^2}, \frac{x_4}{2 - \lambda}, -\frac{x_5}{\lambda}, -\frac{x_6}{\lambda}, \dots\right)\right\|_2 + \left\|\left(0, \frac{\lambda x_2}{1 - \lambda^2}, \frac{\lambda x_3}{1 - \lambda^2}, 0, 0, 0, \dots\right)\right\|_2 \le$$

$$\le M\|x\|_2 + N\|x\|_2 = (M + N)\|x\|_2$$

para valores de M y N

$$M = \text{máx}\left\{\frac{1}{|i - \lambda|}, \frac{1}{|1 - \lambda^2|}, \frac{1}{|2 - \lambda|}, \frac{1}{|\lambda|}\right\}, \text{ y } N = \frac{|\lambda|}{|1 - \lambda^2|}.$$

Por tanto, si $\lambda \notin \sigma_p(A)$ la resolvente está siempre acotada y es continua, y esos valores están en el conjunto resolvente:

$$\rho(A) = \mathbb{C} - \{0, 1, -1, i, 2\}.$$

Ya no quedan valores posibles de $\mathbb{C}$ que puedan estar en las componentes continua y residual, por lo que éstas son vacías:

$$\sigma_c(A) = \sigma_r(A) = \emptyset.$$

Y el espectro es enteramente puntual $\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{0, 1, -1, i, 2\}$.

El operador que acabamos de ver tiene una característica peculiar: se puede factorizar usando un espacio finitodimensional; por ello hereda algunas de las propiedades de los operadores en espacios finitodimensionales, como que son siempre continuos o que su espectro es siempre enteramente puntual.

Definición 1.7 (Operador de rango finito). Un operador A en un espacio vectorial E se dice que es un **operador de rango finito** – *finite-rank operator* – si $\dim A(E) < \infty$.

Veamos un breve resultado sobre la estructura de estos operadores.

Proposición 1.8. *Un operador A en un espacio vectorial E es de rango finito si y sólo si se puede factorizar usando un espacio de dimension finita. Es decir, si existe un espacio X, con $\dim(X) = n < \infty$, y existen operadores $T : A \to E$ y $S : E \to A$ tales que $A = S \circ T$.*

Demostración. Por el Primer Teorema de Isomorfía sabemos que el cociente

$$X = E/\ker(A)$$

es isomorfo a la imagen $A(E)$, ambos de dimensión finita por las condiciones de la proposición, con un isomorfismo canónico

$$\varphi : X \to A(E).$$

Si llamamos $j : A(E) \to E$ al operador inclusión – definido como $j(v) = v$ –, y c al operador cociente $c : A \to X$, entonces tenemos que $A = j \circ \varphi \circ c$. Los operadores $S = \varphi \circ c$ y $T = j$ satisfacen entonces el enunciado de la proposición. □

Y establezcamos el resultado mencionado sobre los espectros de operadores de rango finito en un teorema.

Teorema 1.9. *Sea A un operador de rango finito en un espacio normado. Entonces $\sigma(A) = \sigma_p(A)$.*

En particular, todos los operadores en espacios finitodimensionales son de rango finito.
El espectro del siguiente ejemplo, que se propone para su discusión en los foros, ya no es enteramente puntual.

Ejercicio 1.10. Estudiar el espectro del operador $A : \ell_2 \to \ell_2$, definido como

$$A(x_n) = \left(\frac{x_n}{n}\right).$$

Este último es un ejemplo de operador compacto, que veremos en otra sección.
Por último veamos un ejemplo de un operador con espectro casi enteramente continuo, y que usaremos en la siguiente sección.

Ejemplo 1.11. Sea $E = \mathbb{C}_{B(0,1)}[x]$ el espacio de funciones polinomiales definidas en $B(0,1) = \{z, |z| < 1\}$, es decir, funciones del tipo

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n,$$

con el dominio restringido a $B(0,1)$. Y consideremos al espacio E dotado de la norma $\|\cdot\|_\infty$. Calculemos el espectro del operador[4] derivación $D(f) = f'$.

Empecemos calculando el espectro puntual. Un valor $\lambda \in \mathbb{C}$ estará en el espectro puntual de D si $\exists f \neq 0$ tal que $D(f) = \lambda f$. Es decir, f ha de ser solución de la ecuación diferencial $f' = \lambda f$.

Esta ecuación diferencial se puede solucionar fácilmente, con solución $f(t) = Ce^{\lambda t}$, para cualquier $C \in \mathbb{C}$. Sin embargo, f es una función polinomial únicamente para $\lambda = 0$. Por tanto, el único autovalor de este operador es el 0, y el espectro puntual es $\sigma_p = \{0\}$.

Sabemos entonces que si $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ entonces existe la resolvente $R_\lambda = (D - \lambda\mathbb{I})^{-1}$. Veamos para qué valores de λ este operador no es continuo.

Es fácil tomar una base (de Hamel) de E formada por monomios,

$$B_E = \{1, z, z^2, z^3, \dots\},$$

y ver cómo actúa $D - \lambda\mathbb{I}$ sobre ellos: $(D - \lambda\mathbb{I})(z^n) = nz^{n-1} - \lambda z^n$. Lo que no es tan sencillo es ver cómo actúa la resolvente R_λ sobre ellos.

Si $\lambda \neq 0$, entonces tenemos:

$$\begin{aligned}
(D-\lambda\mathbb{I})(1) &= -\lambda \Rightarrow (D-\lambda\mathbb{I})\left(\frac{-1}{\lambda}\right) = 1 \Rightarrow R_\lambda(1) = -\frac{1}{\lambda} \\
(D-\lambda\mathbb{I})(x) &= 1 - \lambda x \Rightarrow (D-\lambda\mathbb{I})\left(\frac{-x}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda} = x \Rightarrow R_\lambda(x) = -\frac{x}{\lambda} + \frac{R_\lambda(1)}{\lambda} \\
(D-\lambda\mathbb{I})(x^2) &= 2x - \lambda x^2 \Rightarrow (D-\lambda\mathbb{I})\left(\frac{-x^2}{\lambda}\right) + \frac{2x}{\lambda} = x^2 \Rightarrow R_\lambda(x^2) = -\frac{x^2}{\lambda} + 2\frac{R_\lambda(x)}{\lambda}, \ \dots
\end{aligned}$$

Siguiendo el proceso recursivamente se ve que

$$R_\lambda(x^n) = -\frac{x^n}{\lambda} - n\frac{x^{n-1}}{\lambda^2} - n(n-1)\frac{x^{n-2}}{\lambda^3} - \cdots - n!\frac{1}{\lambda^n}.$$

Pero resulta que $\|R_\lambda(z^n)\|_\infty \geq |R_\lambda(z^n)(1)| \geq n!\frac{1}{|\lambda|^n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, mientras que $\|z^n\|_\infty = 1$ (recordemos que las funciones estaban definidas únicamente en $B(0,1)$). Por tanto, R_λ no está acotada si $\lambda \neq 0$, y $\sigma_c(D) = \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Al espectro residual no le queda otra que ser vacío, y como el espectro es todo el cuerpo complejo el conjunto resolvente es también vacío.

Otro ejemplo, muy importante en Física Cuántica.

Ejercicio 1.12. Calcular el espectro del operador posición de una partícula en un intervalo $[a,b]$[5]:

$$\hat{x} : L_2([a,b]) \longrightarrow L_2([a,b]), \ (\hat{x}f)(x) = xf(x).$$

Y un último ejemplo, esta vez con espectro residual no vacío.

Ejemplo 1.13. Sea $S_1 : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ el operador 'shift' o desplazamiento a la derecha, que actúa del siguiente modo:

$$S_1(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, x_4, \dots).$$

[4]Nótese que este operador es no acotado.

[5]Definido en $L^2([a,b])$ como espacio de funciones de $[a,b]$ en $\mathbb{C}$.

El valor 0 forma parte del espectro residual. Es fácil construir la inversa y ver que es una isometría, pero está definida únicamente en un subespacio cerrado de ℓ_2, el formado por los vectores con primera coordenada nula.

2. Autovectores y sucesiones de Weyl.

2.1. Autovalores. En la asignatura de Álgebra de primer curso ya se vieron los autovectores y autoespacios asociados a los distintos autovalores en espacios de dimension infinita. En este curso no nos fijaremos mucho en los autoespacios, pero sí en los autovectores.

Definición 2.1 (Autovector). Dado un operador $A : E \to E$ y un valor $\lambda \in \sigma_p(A)$ del espectro puntual de A, diremos que un vector $v \in E - \{0\}$ es un **autovector** –*eigenvector* – asociado al autovalor λ si

$$Av = \lambda v.$$

O, equivalentemente, si

$$(A - \lambda \mathbb{I})v = 0.$$

A los autovectores se les llamará a veces **autofunciones** – *eigenfunctions* – cuando el espacio E sea un espacio de funciones, y por tanto el autovector sea una función.

Es la existencia de estos autovectores la que hace que no se pueda construir una inversa de $A - \lambda \mathbb{I}$, por lo que dado un autovalor siempre podemos encontrar al menos un autovector asociado a él[6,7].

En el ejemplo 1.4, los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ son autovectores asociados a los autovalores 1, 2 y 3 respectivamente. Y en el ejemplo 1.6, ya calculamos un autovector para cada uno de los autovalores.

El siguiente ejemplo sencillo se propone como ejercicio para discusión en los foros.

Ejercicio 2.2. Sea $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ el espacio de funciones enteras en $\mathbb{C}$ dotado de la norma $\|f\| = \sup_{|z|\le 1} |f(z)|$, y $D : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ el operador derivación[8]. Calcular el

[6] Y, dado un autovector v asociado a cierto autovalor, todos los vectores de $\operatorname{span}\{v\} - \{0\}$ son también autovectores asociados al mismo autovalor.

[7] Esto puede parecer contradecir lo visto en el curso de Álgebra en el caso de espacios vectoriales reales y 'autovalores' complejos. En la asignatura de Álgebra del primer curso, se vio que el polinomio característico de una aplicación lineal podía tener raíces complejas no reales, a las que también se llamó autovalores. Este nombre no tiene sentido como tal si, en el caso de espacios vectoriales reales, pensamos únicamente en autovalores como valores λ para los que la ecuación $Av = \lambda v$ tiene solución. Para ningún $\lambda \notin \mathbb{R}$ existirá tal solución.

Sin embargo, ya se vio cómo esos valores daban mucha información de la estructura de la aplicación lineal. Además, aunque no tenían autovectores asociados sí tenían autoespacios de dimensión 2 (o mayor) asociados, en los que la aplicación inducía un giro.

Por tanto, esos valores son autovalores considerados como raíces del polinomio característico, pero no considerados como valores espectrales, en el caso de espacios vectoriales reales. En el caso de espacios vectoriales complejos no hay tal ambigüedad.

[8] Nótese que la derivada de una función entera es también entera, por lo que el dominio de D es todo $\mathcal{H}$. ¿Cuál sería el dominio en el caso real, si D fuera el operador derivación sobre el espacio $C^1(\mathbb{R})$ de las funciones $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivables? En el caso real, dar un ejemplo de función que no esté en el dominio de D y otro que esté en el dominio de D pero no en el D^2. Otra cuestión, ¿sería $\|f\| = \sup_{-1\le x\le 1} |f(x)|$ una norma en $C^1(\mathbb{R})$?

conjunto resolvente, el espectro con sus componentes puntual, residual y continua, y los autovectores asociados a los autovalores del operador $D^2 = D \circ D$ (si existen).

Una propiedad, ya vista en el curso de Álgebra, es que si tenemos un conjunto de autovectores asociados a autovalores distintos, ese conjunto es linealmente independiente.

PROPOSICIÓN 2.3. *Sea A un operador en un espacio normado E. Si tenemos un conjunto $\{\lambda_i\} \subseteq \sigma_p(A)$ y vectores asociados a esos autovalores $\{v_i\}$, entonces el conjunto de vectores es linealmente independiente.*

DEMOSTRACIÓN. Se deja como ejercicio. □

2.2. Sucesiones de Weyl. En el caso de los valores del espectro continuo ya sabemos que no podemos encontrar autovectores, pues no existiría la resolvente de haber algún autovector y los valores estarían en el espectro puntual y no en el continuo. En su lugar, vamos a poder encontrar sucesiones de vectores que van a 'parecerse' cada vez mas a autovectores, en el sentido de que la ecuación $Av = \lambda v$ casi se va a cumplir. Son los 'casi autovectores', o, más propiamente, sucesiones de Weyl, que apuntarán en algunos casos a la existencia de los 'autovectores generalizados' o 'vectores no normalizados' (distribuciones, en un lenguaje más correcto).

DEFINICIÓN 2.4 (Sucesión de Weyl). Sea E un espacio normado y A un operador definido en él. Una **sucesión de Weyl** – *Weyl sequence* – para A para cierto valor λ es una sucesión de vectores $(v_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E - \{0\}$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|Av_n - \lambda v_n\|}{\|v_n\|} = 0. \tag{2}$$

En el caso en que la sucesión esté normalizada, es decir, $\|v_n\| = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$, tenemos entonces que

$$\lim_{n\to\infty} \|Av_n - \lambda v_n\| = 0.$$

Gracias a la normalización de la ecuación (2), dada una sucesión de Weyl cualquier otra sucesión $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $w_n \in \operatorname{span}\{v_n\} - \{0\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ será también sucesión de Weyl para el mismo valor.

PROPOSICIÓN 2.5. *Si $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Weyl para un operador A en cierto espacio normado E y para cierto valor λ, y $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de escalares no nulos, entonces la sucesión $(\mu_n v_n)_{n=1}^{\infty}$ es también una sucesión de Weyl para el mismo valor λ.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración se deja como ejercicio. □

El resultado anterior nos permite construir una sucesión normalizada de Weyl a partir de cualquier sucesión de Weyl.

Expongamos ahora el resultado esperado que relaciona los elementos del espectro continuo y las sucesiones de Weyl.

TEOREMA 2.6. *Sea A un operador en un espacio normado E. Un valor λ está en $\sigma_p(A) \cup \sigma_c(A)$ si y sólo si existe una sucesión de Weyl para ese valor λ.*

Demostración. $\Longrightarrow$)

Sea $\lambda \in \sigma_p(A)$ y v un autovector asociado a λ. Entonces $(v_n)_{n=1}^{\infty}$, con $v_n = v \ \forall n \in \mathbb{N}$, es una sucesión de Weyl para λ.

Sea $\lambda \in \sigma_c(A)$, y $R_\lambda(A)$ la resolvente asociada a ese valor, que ha de ser no acotada. Entonces

$$\sup_{\|v\|=1} \|R_\lambda(A)(v)\| = \infty,$$

por lo que existe una sucesión de vectores $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ de norma uno tales que

$$\|(A-\lambda\mathbb{I})^{-1}(w_n)\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Tomemos $v_n = (A-\lambda\mathbb{I})^{-1}(w_n)$, entonces

$$\frac{\|(A-\lambda\mathbb{I})(v_n)\|}{\|v_n\|} = \frac{\|(A-\lambda\mathbb{I})(A-\lambda\mathbb{I})^{-1}(w_n)\|}{\|(A-\lambda\mathbb{I})^{-1}(w_n)\|} =$$

$$= \frac{\|w_n\|}{\|(A-\lambda\mathbb{I})^{-1}(w_n)\|} = \frac{1}{\|(A-\lambda\mathbb{I})^{-1}(w_n)\|} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Por tanto $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Weyl para λ.

$\Longleftarrow$)

Sea $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Weyl para cierto valor λ, que podemos suponer normalizada gracias a la proposición 2.5. Entonces $\lim_{n\to\infty} \|(A-\lambda\mathbb{I})(v_n)\| = 0$.

Una de dos, o $\lambda \in \sigma_p(A)$ – y ya habríamos acabado –, o existe la resolvente

$$R_\lambda(A) = (A-\lambda\mathbb{I})^{-1}.$$

Supongamos por tanto lo segundo.

En caso de existir algún $n \in \mathbb{N}$ para el que $\|(A-\lambda\mathbb{I})(v_n)\| = 0$, entonces tendríamos que $\lambda \in \sigma_p(A)$ y no existiría la resolvente, cuando hemos supuesto que sí. Por tanto llegaríamos a una contradicción, con lo que necesariamente no puede existir ningún $n \in \mathbb{N}$ para el que $\|(A-\lambda\mathbb{I})(v_n)\| = 0$.

Sea $w_n = (A-\lambda\mathbb{I})(v_n)$, y calculemos

$$\frac{\|R_\lambda(w_n)\|}{\|w_n\|} = \frac{\|R_\lambda \circ (A-\lambda\mathbb{I})(v_n)\|}{\|(A-\lambda\mathbb{I})(v_n)\|} = \frac{v_n}{\|(A-\lambda\mathbb{I})v_n\|} = \frac{1}{\|(A-\lambda\mathbb{I})(v_n)\|} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Por tanto, la resolvente no está acotada y $\lambda \in \sigma_c(A)$.

□

Veamos algunos ejemplos.

> Ejercicio 2.7. En el ejemplo del ejercicio 1.10, ordenemos los autovalores de forma decreciente: $\sigma_p(A) = \{\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 > \cdots\}$. Calcular entonces un autovector v_n asociado a cada λ_n y demostrar que $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Weyl para el valor del espectro $\lim_{n\to\infty} \lambda_n$.

Igual que en este ejemplo, el límite de autovalores siempre va a ser un valor espectral.

Proposición 2.8. *Sea A un operador en un espacio normado E. Entonces*

$$\overline{\sigma_p(A)} \subseteq \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A).$$

Demostración. La demostración se deja también como ejercicio, análogo al ejercicio anterior. □

Veamos otro ejemplo

Ejemplo 2.9. En el ejemplo 1.11 se puede ver que los desarrollos finitos de las series de Taylor en el 0 (o en otro punto) de las exponenciales son sucesiones de Weyl para los valores del espectro continuo $\sigma_c(D) = \mathbb{C} - \{0\}$. Recordemos que las funciones exponenciales eran las candidatas a autovectores para esos valores espectrales, pero no estaban en el espacio considerado en el problema.

Tomemos $\lambda \neq 0$. El polinomio de Taylor de grado n para la función $e^{\lambda z}$ es $Q_n(x) = 1 + \lambda z + \lambda^2 \frac{z^2}{2} + \lambda^3 \frac{z^3}{3!} + \ldots \lambda^n \frac{z^n}{n!}$.

Resulta que $Q_n' = \lambda Q_{n-1}$. Por tanto, $(D - \lambda\mathbb{I})(Q_n) = -\lambda^n \frac{z^n}{n!}$. Y

$$\left\| -\lambda^n \frac{z^n}{n!} \right\|_\infty = \frac{\lambda^n}{n!} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Por otro lado, Q_n es un polinomio muy próximo a la exponencial, como podemos saber por acotaciones de la aproximación usando el desarrollo de Taylor complejo y las desigualdades de Cauchy, o por una reducción del problema al desarrollo de Taylor real:

$$\|e^{\lambda z} - Q_n(z)\|_\infty \leq \left\| |\lambda|^{n+1} e^{|\lambda z|} \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \right\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Por lo que $\|Q_n\|_\infty \to \|e^{\lambda z}\|_\infty = e^{|\lambda|}$. Así que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|(D - \lambda\mathbb{I})(Q_n)\|_\infty}{\|Q_n\|_\infty} = 0.$$

Por tanto, Q_n es una sucesión de Weyl para el valor $\lambda \in \sigma_c(A)$.

La construcción anterior también habría sido válida de haber estado las exponenciales en el espacio, lo que nos da un indicio del siguiente resultado.

Proposición 2.10. *Sea A un operador continuo en un espacio normado E, y sea $\lambda \in \sigma_p(A)$ y v un autovector asociado a ese autovalor. Si tenemos una sucesión $(v_n)_{n=1}^\infty$ de vectores no nulos con $\lim_{n\to\infty} v_n = v$, entonces $(v_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión de Weyl para el valor λ.*

Demostración. Se deduce de la continuidad de $A - \lambda\mathbb{I}$. □

Por último, se puede ver que los límites de valores del espectro continuo también están en $\sigma_p \cup \sigma_c$. Por lo que tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.11. *Sea A un operador en un espacio normado X. $\sigma_p(A) \cup \sigma_c(A)$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{C}$.*

Demostración. Sea λ_n una sucesión de valores de $\sigma_p(A) \cup \sigma_c(A)$ que converja a un cierto valor λ. Vamos a comprobar si λ también está en ese conjunto.

Para cada n, podemos encontrar una sucesión de Weyl normalizada $(v_{\lambda_n,m})_{m=1}^\infty$. Para ese mismo n, podemos encontrar un elemento de esa sucesión de Weyl que verifique $(A - \lambda_n\mathbb{I})(v_{\lambda_n,m_n}) < 1/n$.

Entonces la sucesión $(v_{\lambda_n,m_n})_{n=1}^\infty$ es una sucesión de Weyl para λ. Comprobémoslo.

$$(\|A - \lambda\mathbb{I})(v_{\lambda_n,m_n})\| = \|(A - \lambda_n\mathbb{I} + \lambda_n\mathbb{I} - \lambda\mathbb{I})(v_{\lambda_n,m_n})\| \leq$$
$$\leq \|(A - \lambda_n\mathbb{I})(v_{\lambda_n,m_n})\| + \|(\lambda_n\mathbb{I} - \lambda\mathbb{I})(v_{\lambda_n,m_n})\| \leq 1/n + |\lambda_n - \lambda| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Por tanto, $\lambda \in \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A)$, y este conjunto es cerrado. □

Aunque ya hemos visto ejemplos de sucesiones de Weyl, estos tampoco eran muy interesantes, pues siempre estaban en algún modo relacionados con valores del espectro puntual. Para ver un ejemplo con características distintas volvamos al operador posición del ejercicio 1.12, cuyo espectro era enteramente continuo.

Ejercicio 2.12. Consideremos el operador posición del ejercicio 1.12. Demostrar que las funciones $\chi_{[x_0-\frac{1}{n},x_0+\frac{1}{n}]}$, funciones características[9] de los respectivos intervalos, forman una sucesión de Weyl para cualquier valor

$$x_0 \in \sigma(\hat{x}) \cap (a,b).$$

Encontrar sucesiones de Weyl para los valores a y b.

Si normalizamos las sucesiones del ejercicio anterior, tenemos las funciones

$$\sqrt{n/2}\ \chi_{[x_0-\frac{1}{n},x_0+\frac{1}{n}]},$$

que 'tienden' a la distribución delta de Dirac en x_0. Este es uno de esos 'vectores no normalizados' que pueden aparecer en los casos de valores espectrales en el espectro continuo.

3. Principales resultados de teoría espectral.

En esta sección expondremos algunos de los principales resultados generales de teoría espectral, de los que omitiremos las demostraciones. Todas ellas se pueden encontrar en casi cualquier libro de Análisis Funcional, y en concreto en el libro 'Functional Analysis with Applications' de Kreyszig. Nótese que estos resultados son para espacios completos y operadores acotados, por lo que hay que ser cuidadoso a la hora de utilizarlos.

Teorema 3.1. *El espectro de un operador acotado en un espacio de Banach es cerrado.*

Teorema 3.2. *Dado un valor $\lambda \in \sigma(A)$, para A un operador acotado en un espacio de Banach E, tenemos que $|\lambda| \leq \|A\|$. Es decir, el radio espectral es menor o igual que la norma de A.*

Consecuentemente, si A es un operador acotado en un espacio de Banach su espectro es compacto, por ser cerrado y acotado.

Ejercicio 3.3. Ayudándose de este último teorema, calcular el espectro del operador 'shift' a la izquierda definido en ℓ_p para $1 \leq p < \infty$,

$$S_{-1}(x_1,x_2,x_3,x_4,\dots) = (x_2,x_3,x_4,\dots)$$

Teorema 3.4 (Spectral Mapping Theorem, versión polinomios). *Dado un operador acotado A en un espacio de Banach, y un polinomio $p(x)$, se verifica que $\sigma(p(A)) = p(\sigma(A))$.*

[9] Para un conjunto B, $\chi_B(x) = 1$ si $x \in B$, $\chi_B(x) = 0$ si $x \notin B$. A veces también llamadas funciones indicadoras, con notación $\mathbb{1}_B$. Nótese que tan sólo a partir de cierto n, dependiente de x_0, las funciones estarán en el espacio, por lo que las sucesiones pueden considerarse comenzadas en ese n.

EJEMPLO 3.5. Supongamos que $\sigma(A) = \{0, 1, 2, 3\}$. Entonces se tiene que

$$\sigma(A^3 - 2A + 7\mathbb{I}) = \{6, 7, 13, 32\},$$

ya que si tomamos $p(x) = x^3 - 2x + 7$ tenemos que $p(0) = 7$, $p(1) = 6$, $p(2) = 13$ y $p(3) = 32$.

TEOREMA 3.6. *El espectro de un operador acotado en un espacio de Banach (distinto del espacio $\{0\}$) es no vacío.*

Y un último resultado en esta parte.

TEOREMA 3.7. *Dado un operador A acotado en un espacio de Banach, su radio espectral es*

$$r_\sigma(A) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}.$$

4. Teoría espectral de operadores autoadjuntos acotados, compactos y unitarios.

Recordemos qué era el operador adjunto y qué es un operador autoadjunto. Dado un operador acotado $A : H \longrightarrow H$ en un espacio de Hilbert, su adjunto es el único operador $A^* : H \longrightarrow H$ tal que

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle, \ \forall x, y \in H.$$

A^* también es un operador acotado y su norma coincide con la de A.

Un operador es autoadjunto o hermítico[10] si coincide con su adjunto:

$$A = A^*.$$

Veamos las principales propiedades espectrales de los operadores autoadjuntos. La primera es que todo el espectro va a ser real. Para los autovalores es fácil de demostrar.

TEOREMA 4.1. *Sea A un operador autoadjunto acotado. Entonces $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$, pudiendo ser vacío.*

Autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales entre sí.

DEMOSTRACIÓN. Se deja como ejercicio. □

Y enunciemos, sin demostración, el resultado general.

TEOREMA 4.2. *Sea A un operador autoadjunto acotado. Entonces $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ y su espectro residual es vacío, $\sigma_r(A) = \varnothing$. Además, se sabe que $r_\sigma(A) = \|A\|$.*

Una característica de los operadores autoadjuntos es que existe una familia de proyecciones, a veces sobre los respectivos autoespacios, que permiten describir el operador.

TEOREMA 4.3 (Teorema de descomposición espectral, versión espectro puntual). *Sea A un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert H con $\sigma(A) = \sigma_p(A)$ un conjunto finito. Entonces sabemos que*

1) $H = \oplus_{\lambda \in \sigma_p(A)} \ker(A - \lambda\mathbb{I})$,

2) $A = \sum_{\lambda \in \sigma_p(A)} \lambda \Pi_\lambda$,

donde Π_λ es el proyector ortogonal sobre el subespacio $\ker(A - \lambda\mathbb{I})$.

[10] En el caso de operadores no acotados autoadjunto y hermítico no es lo mismo.

EJERCICIO 4.4. Determinar la descomposición espectral del operador AA^*, siendo A el operador del ejemplo 1.4.

EJERCICIO 4.5. Comprobar que aunque el espectro de

$$A(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2)$$

es también enteramente puntual, no se puede conseguir una descomposición espectral del mismo tipo.

El anterior teorema también es válido para operadores autoadjuntos compactos[11], que son aquellos operadores autoadjuntos que se pueden 'aproximar' por operadores de rango finito, incluso aunque el espectro no sea enteramente puntual. Establezcamos más precisamente cuáles son estos operadores.

DEFINICIÓN 4.6 (Operador compacto). Sea A un operador en un espacio de Banach E. Se dice que A es un **operador compacto**[12] – *compact operator* – si

i) Su espectro es a lo sumo un número numerable de valores.

ii) En caso de que el espectro sea infinito, 0 es el único punto de acumulación posible de ese conjunto.

iii) $\dim(\ker(A - \lambda\mathbb{I}))$ es finito y distinto de 0 para todo elemento del espectro distinto de 0.

Por tanto, para los operadores compactos tenemos que $\sigma(A) - \{0\} = \sigma_p(A) - \{0\}$; es decir, el 0 es el único valor que puede estar en el espectro continuo. El 0 siempre va a ser un valor espectral en el caso de operadores compactos en espacios de dimensión infinita, y estará en el espectro puntual o en el continuo dependiendo de la inyectividad de A.

EJEMPLO 4.7. El operador$A$ del ejercicio 1.10 es un operador compacto[13], y $0 \in \sigma_c(A)$.

EJERCICIO 4.8. Determinar la descomposición espectral del ejemplo del ejercicio 1.10.

EJEMPLO 4.9. El operador identidad en un espacio E es compacto si y solamente si $\dim(E) < \infty$.

Para otros tipos de operadores[15] se tiene una descripción similar, aunque más complicada. Viene dada en función de una medida espectral de proyecciones.

[11] En caso de que tengamos una familia infinita de autoespacios tendríamos $H = \overline{\oplus_{\lambda\in\sigma_p(A)} \ker(A - \lambda\mathbb{I})}$, pues la suma directa sólo considera combinaciones lineales finitas de elementos de los distintos sumandos. En ocasiones se puede ver en este contexto la suma directa infinita escrita sin el simbolo de adherencia, ya que la completitud del espacio se da por supuesta cuando se habla de espacios de Hilbert.

[12] La definición real de operador compacto es otra equivalente a esta pero que excede los contenidos del curso: un operador es compacto si la imagen de cualquier subconjunto acotado es relativamente compacta.

[13] Ejercicio: dar una aproximación B de rango finito tal que $\|A - B\| < 1/10$.

DEFINICIÓN 4.10. Dado un espacio E y una σ-algebra β (e.g., medibles, borelianos,...), una **medida espectral** – *spectral measure* – es una función

$$\Phi : \beta \longrightarrow \mathcal{B}(E),$$

tal que:

1) $\Phi(S)$ es una proyección $\forall S \in \beta$.
2) $\Phi(\varnothing) = 0$ y $\Pi(E) = \mathbb{I}$.
3) $\Phi(S \cap T) = \Phi(S)\Phi(T)$
4) $\Phi(\cup_{i=1}^{\infty}(S_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi(S_i)$, en la topología débil[14], para S_i disjuntos.

Entonces,

TEOREMA 4.11 (Teorema de descomposición espectral, versión autoadjuntos). *Sea A un operador autoadjunto*[15] *acotado en un espacio de Hilbert H. Entonces existe una medida espectral en los medibles de $\mathbb{R}$ tal que*

1) $A = \int_{\mathbb{R}} z\, d\Phi(z) dz$.
2) $\Pi(C) \neq 0$ para cualquier abierto C tal que $C \cap \sigma(A) \neq \varnothing$.

EJEMPLO 4.12. En los casos en que es válido el anterior teorema espectral también existe una medida espectral. Esta es

$$\Phi(\beta) = \sum_{\lambda \in \sigma_p(A) \cap \beta} \Pi_\lambda.$$

Es decir, la proyección asociada a un conjunto β es la proyección sobre la adherencia[16] de la suma de autoespacios asociados a autovalores contenidos en β.

EJEMPLO 4.13. En el caso del operador posición, la medida estaría definida para cualquier conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ medible y correspondería a $\Phi(S) = \Pi_{L^2(\beta)}$, la proyección de $L^2(\mathbb{R})$ sobre las funciones de L^2 en el correspondiente medible S:

$$\Phi(S)(f) = \Pi_{L^2(S)}(f) = \chi_S \cdot f.$$

Los teoremas de descomposición espectral nos permiten definir $f(A)$ para las funciones de variable real $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, con $\mathrm{dom}(f) \supseteq \sigma(A)$.

Versión 1:

$$f(A) = \sum_{\lambda \in \sigma_p(A)} f(\lambda)\Pi_\lambda$$

Versión 2:

$$f(A) = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\Phi(x)$$

EJERCICIO 4.14. Calcular $B_t = e^{itA}$ siendo A el operador del ejemplo 1.4. Comprobar que ese operador es unitario para cualquier valor $t \in \mathbb{R}$.

---

[14] Se dice que una sucesión de operadores A_n converge débilmente a otro A si $\forall v \in E,\ A_n(v) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} A(v)$.

[15] El teorema de descomposición espectral se establece para operadores normales – aquellos N que verifican $NN^* = N^*N$, entre los que se encuentran los operadores autoadjuntos pero también los unitarios, aquellos U que verifican $UU^* = U^*U = \mathbb{I}$ –, para los que el espectro no es necesariamente real. Es por ello que esta versión es únicamente para operadores autoadjuntos acotados.

[16] En el caso de sumas infinitas.

Ejercicio 4.15. Demostrar que la raíz cuadrada de cualquier proyección es la misma proyección.

En el primero de estos ejercicios, se ve que la exponencial imaginaria de cierto operador autoadjunto es unitaria. Esto sucede en general, pero antes veamos ciertas propiedades de los operadores unitarios.

Proposición 4.16. *Sea U un operador unitario*[17] *en un espacio de Hilbert H. Entonces $\sigma(U) \subseteq \{z, |z| = 1\}$.*

Demostración. Que $\sigma_p(U) \subseteq \{z, |z| = 1\}$ se deja como ejercicio, aunque no es necesario para el desarrollo que sigue.

Sabemos que $\|U\| = 1$, por tanto, $\sigma(U) \subseteq \{z, |z| \leq 1\}$.

Por otro lado, si $|\lambda| < 1$, entonces la serie

$$S = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j (U^*)^{j+1}$$

converge a un operador continuo por ser $\mathcal{B}(H)$ un espacio de Banach[18], que resulta ser el inverso de $(U - \lambda \mathbb{I})$.

Por tanto $\rho(U) \supset \{z, |z| < 1\}$ y $\sigma(U) \subseteq \{z, |z| = 1\}$. □

Enunciemos ahora el teorema de representación espectral para operadores unitarios. Téngase en cuenta que en el caso de espectros puntuales finitos se tendría un resultado análogo al teorema 4.3.

Teorema 4.17 (Teorema de descomposición espectral, versión unitarios). *Sea U un operador unitario en un espacio de Hilbert H. Entonces existe una medida espectral en los medibles de $\mathbf{S}^1 = \{z, |z| = 1\}$ tal que*

1) $A = \int_{\mathbf{S}^1} z \, d\Phi(z) dz$.

2) $\Pi(C) \neq 0$ para cualquier abierto C tal que $C \cap \sigma(A) \neq \varnothing$.

Ejercicio 4.18. Sea η una raíz n-ésima de la unidad, y

$$A : \ell_2 \longrightarrow \ell_2, \;\; f((x_j)_{j=1}^{\infty}) = (\eta^j x_j)_{j=1}^{\infty}.$$

Demostrar que A es unitario y determinar su descomposición espectral. ¿Es A un operador compacto?

¿Cuál sería la descomposición espectral si fuera $\eta = e^{2\pi i r}$, con r un número irracional? ¿Sería A compacto en este caso?

Con este resultado podemos definir $f(U)$ para cualquier $f : \mathbf{S}^1 \longrightarrow \mathbb{C}$, análogamente a lo realizado anteriormente con los operadores autoadjuntos

Consecuentemente, podemos relacionar los operadores autoadjuntos y los unitarios del siguiente modo. Dado A un operador autoadjunto acotado, entonces e^{iA} es un operador unitario. Y dado U un operador unitario, entonces $\log(U)/i$ es un operador autoadjunto para cualquier determinación de log. Nótese que la primera relación es unívoca, mientras que la segunda no: dado un operador autoadjunto podemos encontrar un único unitario

[17] Recordemos que los operadores unitarios son necesariamente acotados.

[18] Ejercicio: demuéstrese esta afirmación.

cumpliendo la primera relación, pero en la segunda dado un operador unitario podemos encontrar muchos operadores autoadjuntos verificando la relación. Esto se debe a que el logaritmo complejo es una función multivaluada, como inversa de la exponencial compleja, que es no inyectiva.

> Ejercicio 4.19. Dado un operador unitario U, con espectro no finito, encontrar dos operadores A_1 y A_2 'autoadjuntos' tales que A_1 sea acotado pero A_2 no lo sea y tales que $U = e^{iH_j}$, $j = 1, 2$.

En el ejercicio anterior hemos escrito 'autoadjuntos' dado que no se ha visto aún qué propiedades tiene que cumplir un operador no acotado para ser autoadjunto.