¿CÓMO REPRESENTAR FUNCIONES EN VARIABLE COMPLEJA?

MATERIAL CREADO PARA LA RED DE INNOVACIÓN DOCENTE “VISUALIZACIÓN Y DOCENCIA DE VARIABLE COMPLEJA: DESARROLLO Y USO DE MATERIALES” (UNED)
EQUIPO DOCENTE DE AMPLIACIÓN DE CÁLCULO

Cuando consultamos materiales relacionados con funciones de variable compleja, ya sea libros, programas informáticos (matlab, mathematica, maple, scilab, maxima...) o páginas de internet, nos encontramos con varias formas de representación de funciones complejas. Los dibujos y las gráficas suelen ser muy vistosos, pero es necesario dar una interpretación adecuada para saber qué es lo que estamos viendo realmente y qué aspectos de las funciones podemos analizar a través de ellos.

La representación gráfica es un recurso muy útil a la hora de realizar el estudio de una función. Sabemos que las funciones reales de una sola variable, se pueden visualizar en dos dimensiones (en el plano) de forma sencilla: para cada punto x en el eje de abcisas, dibujamos un punto (x, y) a altura $y = f(x)$. Para dibujar las funciones reales de dos variables necesitamos una dimensión más, es decir, debemos usar el espacio tridimensional: para cada punto (x, y) del plano xy dibujamos un punto (x, y, z) a altura $z = f(x, y)$. Véase Figura 1. Sin embargo, para funciones reales a partir de tres variables la cosa se complica. Las gráficas de las funciones definidas en el espacio tridimensional con valores reales viven en un espacio de 4 dimensiones y por tanto no las podemos “pintar”.

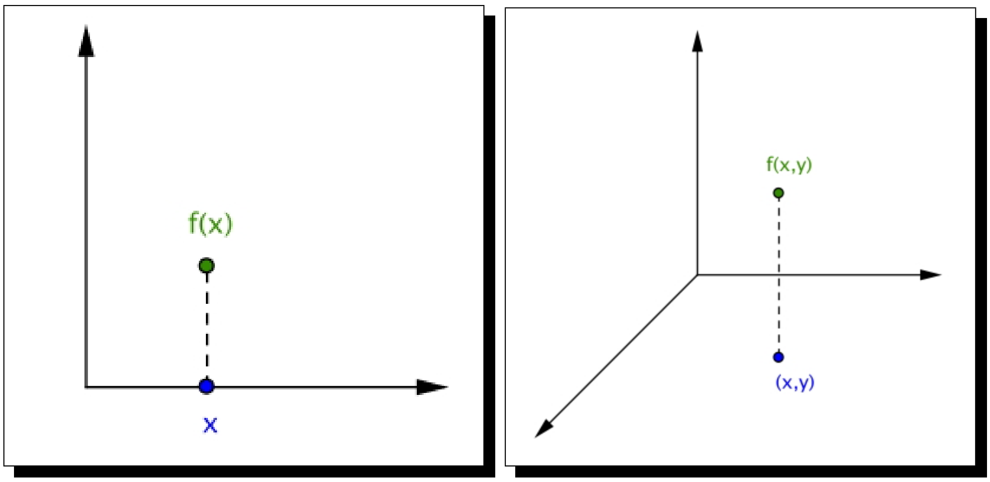

Figure 1. Representación de funciones reales en 2 y 3 dimensiones

A la hora de representar funciones complejas $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nos encontramos con el mismo problema. Sabemos que cada número complejo $z = x + iy$ tiene asociado un punto (x, y), de modo que existe una correspondencia entre $\mathbb{C}$ y los puntos del plano. Así, una función compleja puede ser vista como una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y por tanto *la gráfica de una función compleja vive en un espacio de 4 dimensiones.*

Sin embargo, aún teniendo estas limitaciones, existen diferentes recursos para poder estudiar ciertos aspectos de las funciones complejas sin necesidad de pintar la gráfica de la función. Por ejemplo, es posible representar la parte real, la parte imaginaria o el módulo de la función, que son funciones con valores reales.

Por otra parte, recordemos que en Cálculo Integral estudiamos cómo se transforman regiones del plano $A \subset \mathbb{R}^2$ después de aplicar un cambio de variable $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Por ejemplo, se vió que un rectángulo en el plano se transforma después de aplicarle un cambio de de coordenadas polares, en un paralelogramo curvilíneo cuyos lados son dos arcos de circunferencias concéntricas y dos segmentos de radio. Ver figura 2.

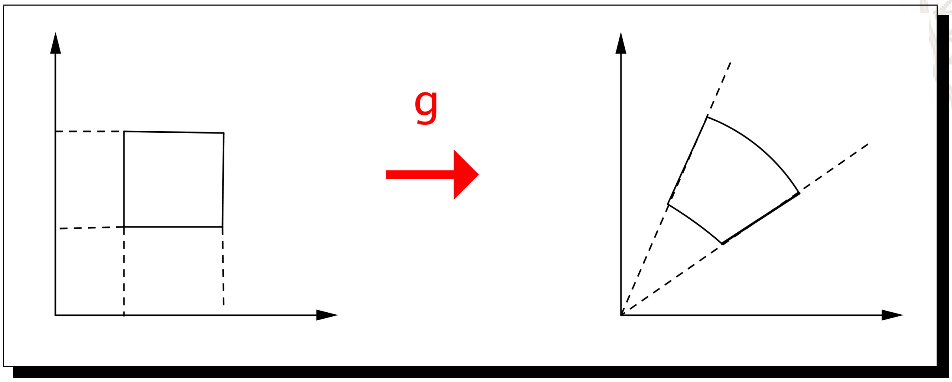

FIGURE 2. Transformación en coordenadas polares

Esta es otra idea para representar funciones de variable compleja: estudiar cómo se transforman regiones del plano mediante la acción de funciones complejas.

A continuación presentamos algunas de las formas más utilizadas a la hora de representar funciones de variable compleja que esperamos sirvan como una pequeña guía para interpretar las imágenes que irán encontrando relacionadas con esta materia.

(1) Gráficas de la parte real e imaginaria

Teniendo en cuenta que cada número complejo $z = x + iy$ tiene asociado un punto (x, y) de modo que existe una correspondencia biunívoca entre $\mathbb{C}$ y los puntos del plano, cada función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z)$ se puede ver como

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (x, y) & \longrightarrow & (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z). \end{array}$$

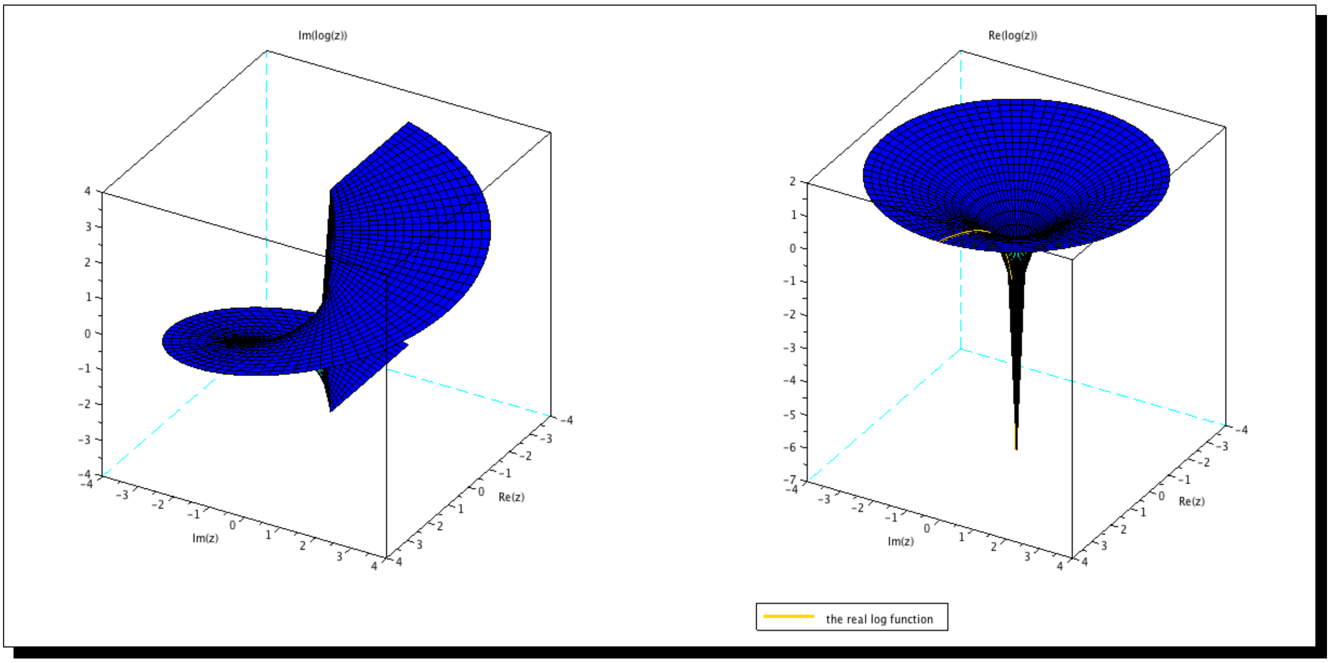

FIGURE 3. Partes imaginaria y real de $f(z) = \log(z)$. Demostración de Scilab (http://www.scilab.org/)

En la figura 3 se representan las partes real e imaginaria del logaritmo complejo. Recordemos que dado un número complejo $w \neq 0$ se llama *logaritmo* de w a cualquier número complejo $z = x + iy$ tal que $e^z = w$. Entonces, si $w = |w|e^{i\theta}$, se deduce que

$$\operatorname{Re} \log(z) = x = \log |w| \qquad \operatorname{Im} \log(z) = y = \theta + 2k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$$

En la parte real se puede apreciar que la función logaritmo tiene un polo en $z = 0$. Por otra parte, en la parte imaginaria sólo se representa la rama principal del logaritmo (recordemos que el logaritmo es una función multiforme y para que sea aplicación necesitamos fijar una rama). Si proyectásemos la parte imaginaria contra el suelo (plano xy) obtendríamos una círculo perfecto.

(2) Módulo de una función compleja

Otra posibilidad es dibujar el módulo de una función compleja. Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$\begin{array}{rcccl} |f| & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longrightarrow & |z| = x^2 + y^2. \end{array}$$

El módulo nos permite por ejemplo visualizar las singularidades de la función.

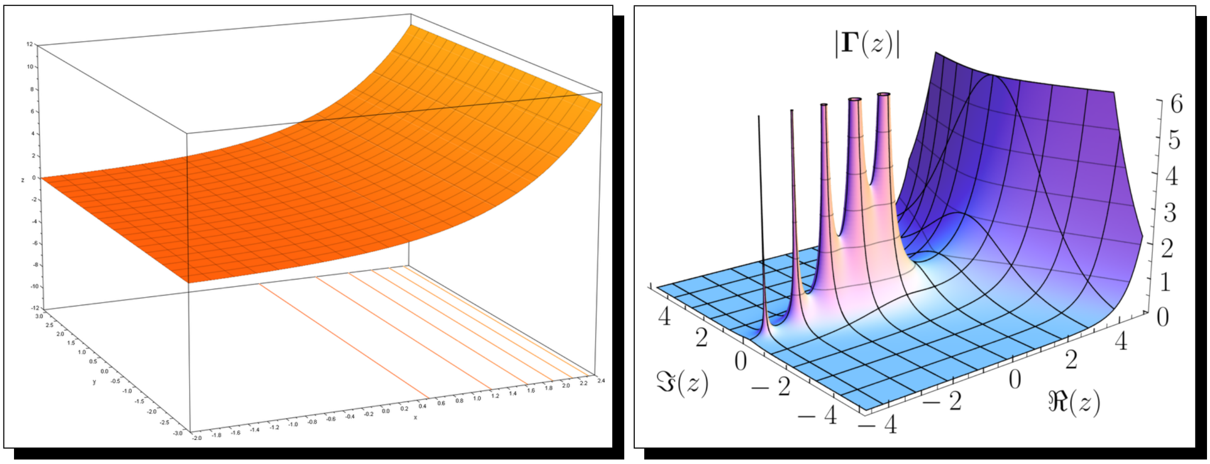

FIGURE 4. Representación de $f(z) = |e^z|$ y $f(z) = |\Gamma(z)|$

Por ejemplo, si consideramos la función $f(z) = e^z$ con $z = x+iy$, tenemos que $|f(z)| = |e^z| = e^x$. De hecho, en la figura 4 se puede apreciar que el corte de $f(z) = |e^z|$ con planos paralelos al eje x corresponden con la función exponencial real. Por otro lado, la función $f(z) = \Gamma$, conocida como función gamma es una función meromorfa con polos simples en $z = -n$ con $n = 0, 1, 2 \cdots$

Ambas figuras están creadas por el programa Mathematica. La primera figura está sacada de http://en.wikipedia.org/wiki/User:Sam-Derbyshire/Gallery y la segunda figura de http://en.wikipedia.org/wiki/File:ExponentialAbs.png.

(3) Gráfica de la transformación

Otra forma de caracterizar geométricamente a las funciones de variable compleja es representar cómo se transforman las curvas o conjuntos del plano complejo a través de dicha función.

Tomamos como ejemplo la función $f(z) = z^2$. Sabemos que si $z = x + iy$

$$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Re} z = x^2 - y^2 \quad \mathrm{Im} z = 2xy \quad (*)$$

¿Cómo se tranforma las rectas horizontales y verticales por la función $z \mapsto z^2$?

Usando $(*)$, la recta $x = k$, $k \in \mathbb{R}$ se transforma en $u = k^2 - y^2$, $v = 2ky$ con $y \in \mathbb{R}$. Por tanto las recta verticales se transforman en parábolas de tipo $u = k^2 - \left(\frac{v}{2k}\right)^2$ si $k \neq 0$ y $u \leq 0$, $v = 0$ si $k = 0$. Análogamente la recta $y = k$, $k \in \mathbb{R}$ se transforma en $u = x^2 - k^2$, $v = 2kx$ con $x \in \mathbb{R}$. Por tanto las rectas horizontales se transforman en parábolas de tipo $u = \left(\frac{v}{2k}\right)^2 - k^2$ si $k \neq 0$ y $u \geq 0$, $v = 0$ si $k = 0$. Dicho de otra manera la función $z \mapsto z^2$ transforma rectángulos de lados paralelos en rectángulos de lados parabólicos.

Véase la figura 5. Los dibujos han sido creados por Douglas N. Arnold y se encuentran en http://www.ima.umn.edu/ arnold/complex.html.

El punto débil de este tipo de este tipo de representaciones es que no está claro simplemente mirando el dibujo qué punto de las curvas originales (las rectas) corresponde a los puntos de las imágenes (los situados en las parábolas). El siguiente método solventa este problema.

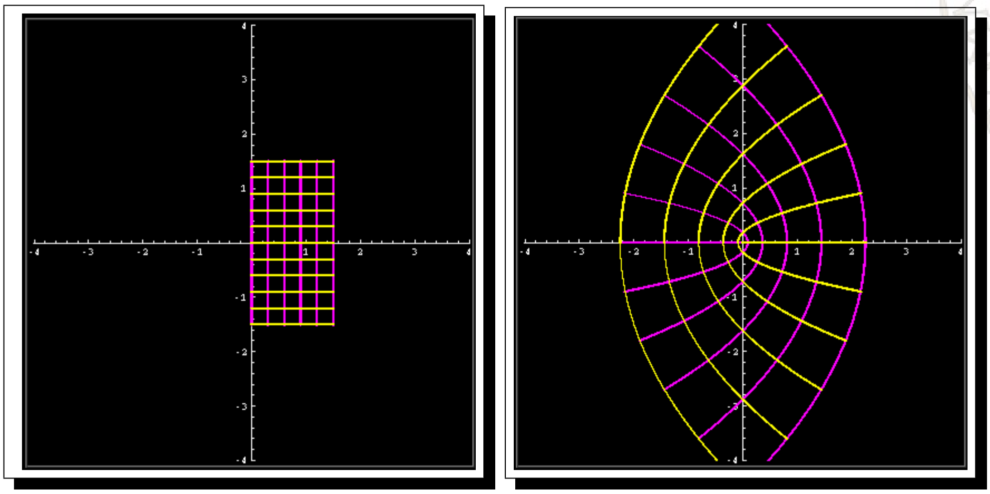

FIGURE 5. Representación de funciones reales en 2 y 3 dimensiones

(4) Coloreado del dominio

Para visualizar números complejos se puede usar una función color que asocia a cada número complejo un color determinado. El plano complejo puede visualizarse como una paleta de colores construida a partir del sistema **HLS** (del inglés **H**ue, **S**aturation, **L**ightness - Matiz, Saturación, Luminosidad). Véase Figura 6.

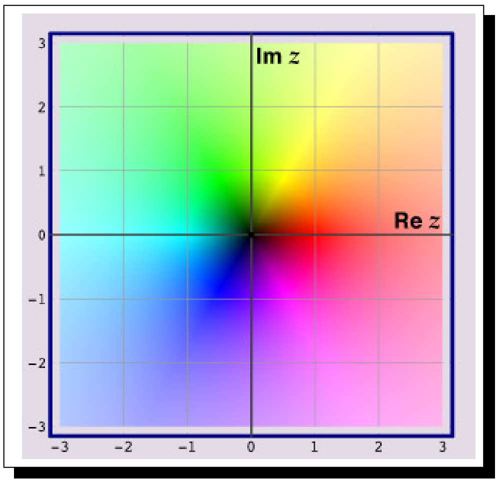

FIGURE 6. Plano complejo coloreado

En el plano complejo coloreado, el tono (cantidad de luz presente en un color) representa el argumento del número complejo y la luminosidad (o claridad) representa el valor absoluto. Recordemos que un número complejo se puede representar en forma polar: $z = re^{i\mathrm{Arg}z}$, donde r denota el módulo y Arg el argumento.

Nótese que los colores primarios aparecen en los ángulos $0, 2\pi/3$ y $4\pi/3$, correspondientes al rojo, verde y azul. Con este código los números reales positivos son rojo magenta. También se puede apreciar que el número complejo $z = 0$ es negro, y por tanto, los *ceros* de una función compleja $\{z : f(z) = 0\}$ serán negros. Al punto del infinito se le asociaría de manera intuitiva el blanco, y por tanto, a los *polos* de la función se les asocia el color blanco.

La figura 7 representa cómo se transforma el plano complejo coloreada a través de dos funciones complejas. En la primera figura se puede observar que la función $f(z) = 1/z$ tiene un polo (en color blanco) en $z = 0$. A través del dibujo se puede ver muy bien cómo actúa una inversión: los puntos cercanos al cero se van hacia el infinito (es decir, los puntos con poca luminosidad se desplazan al origen) y los puntos muy lejanos se acercan al cero (es decir, los puntos con mucha luminosidad se van hacia el infinito). La segunda función $f(z) = \sqrt{z}$ es una

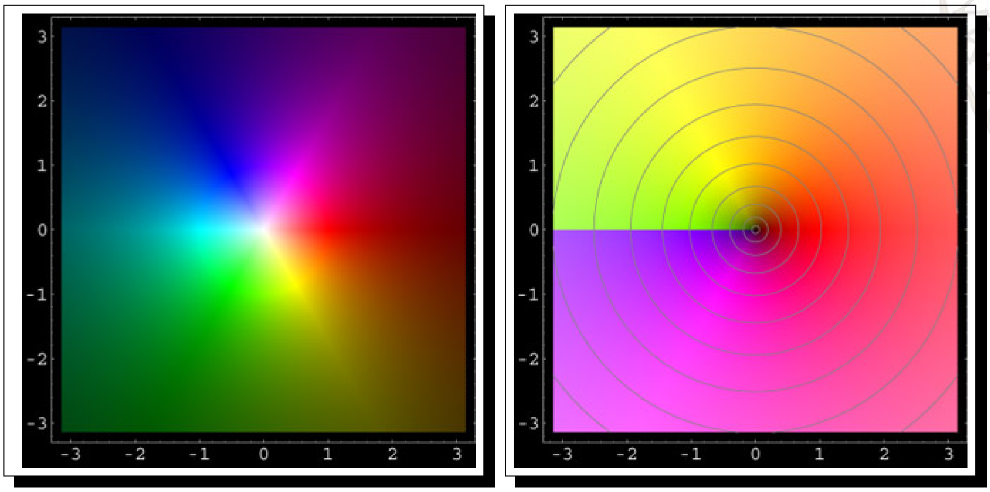

FIGURE 7. Representación de $f(z) = \frac{1}{z}$ y $f(z) = \sqrt{z}$

función multiforme, y por tanto para que sea aplicación se ha fijado la rama principal, la que corresponde al argumento $[-\pi, \pi]$. Se observa también que la función $f(z) = \sqrt{z}$ tiene un cero (color negro) en $z = 0$.

Las imágenes de la figura 7 han sido creadas por Bern Thaller. Para más información se puede consultar la web http://vqm.uni-graz.at/pages/complex/index.html.

Comentario final

A través de las gráficas y transformaciones que acabamos de presentar es posible en muchos casos visualizar las singularidades y los ceros de las funciones complejas, dos elementos muy importantes en el estudio de la variable compleja.

Sin embargo, es preciso señalar que existe una diferencia básica entre el análisis real y complejo. Mientras que gran parte de los resultados de análisis de variable real se pueden predecir a partir de la interpretación geométrica de la derivada, no podemos decir lo mismo de la variable compleja. Por ejemplo, si una función derivable de variable real tiene un máximo relativo en un punto, entonces su derivada es nula en dicho punto. Esto se observa fácilmente pintando la recta tangente a la función en un punto y viendo que dicha recta tiene pendiente nula. Sin embargo, si una función holomorfa (función compleja y derivable) tiene un máximo relativo (en módulo) en un punto entonces es constante (Liouville+principio de módulo máximo). El resultado de variable real es muy fácil de ver geométricamente. El de variable compleja está muy lejos de ser evidente geométricamente.