TEORÍA DEL CRECIMIENTO ECONÓMICO

Apuntes de Macroeconomía IV(*).
5º curso de LECO

Sonia Benito Muela
Departamento de Análisis Económico II (UNED)
Senda del Rey nº 11,
Madrid, 28017

(*) Estos apuntes son un complemento del libro de Apuntes de Crecimiento Económico de Sala i Martín.

1. Introducción

Sin género de dudas, la teoría del crecimiento económico es la rama de la economía de mayor importancia y la que debería ser objeto de mayor atención entre los investigadores económicos.

No es difícil darse cuenta de que pequeñas diferencias en la tasa de crecimiento sostenidas durante largos períodos de tiempo generan enormes diferencias en los niveles de renta per cápita. Por poner un ejemplo, el Producto Interior Bruto per cápita de los Estados Unidos pasó de 2.244 $ en 1870 a 18.000 $ en 1990. Ambas cifras en dólares reales de 1985. Es decir, en poco mas de un siglo el PIB se multiplicó por ocho. Este cambio sustancial, que representó una tasa de crecimiento anula del 1,75% ha convertido a Estados Unidos en el país más rico del mundo. Para ver lo que esta tasa de crecimiento significa, imaginamos tres hipotéticos países cuyo PIB en el año 1870 es idéntico, pero cuyas tasas de crecimiento medio han diferido en un simple 1%. El país A ha tenido una tasa de crecimiento medio del 1,75% (como Estados Unidos). Consideramos lo que habría pasado si el mismo país hubiera crecido al 0,75% en lugar del 1,75%. El PIB per cápita en 1990 habría sido de 5.519 $, menos de una tercera parte. Esto significa que, en lugar de ser el país más rico del mundo Estados Unidos tendría una renta per cápita del nivel de Mexico o Hungría y disfrutaría de 1.000 $ menos por persona que Portugal o Grecia. ¡*Y la diferencia entre uno u otro escenario es de tan sólo un punto porcentual en la tasa de crecimiento*¡.

Si imaginamos ahora que la tasa de crecimiento anual en los Estados Unidos hubiera sido de 2,75%, manteniendo constante el nivel inicial, el PIB per cápita habría llegado a ser de 60.481 dólares (27 veces mayor al que tenía en 1870).

Vemos pues que pequeñas diferencias en la tasa de crecimiento a largo plazo pueden dar lugar a grandes diferencias en los niveles de renta per cápita y de bienestar social a largo plazo.

Entre 1900 y 1987, economías como la India, Paquistán y Filipinas han crecido a tasas medias del 0,64%, 0,88% y 0,86% respectivamente mientras que países como Japón y Taiwán han crecido a sendas tasas del 2,95% y 2,75% respectivamente. A la vista de estos datos la pregunta que surge es, *¿Por qué*?, *¿Porque hay países que crecen a tasas del 2,75% y otros países que crecen a tasas del 0,64%*?, *¿Qué es lo que determina el crecimiento económico*?. Al Estudio de esta cuestión se dedica la Teoría del Crecimiento Económico.

Teoría del Crecimiento Económico.

La teoría del crecimiento económico estudia cuales son los determinantes del crecimiento económico a largo plazo y las políticas que deben impulsarse para estimular el crecimiento.

La historia del crecimiento económico es tan larga como la historia del pensamiento económico. Ya los primeros clásicos como Adan Smith, David Ricardo o Thomas Maltus estudiaron el tema del crecimiento o introdujeron conceptos fundamentales como el de rendimientos decrecientes y su relación con la acumulación de capital físico o humano, la relación entre el progreso tecnológico y la especialización del trabajo o el enfoque competitivo como instrumento de análisis de equilibrio dinámico.

Asimismo, los clásicos del siglo XX como Ramsey, Young, Knight o Schumpeter contribuyeron de manera fundamental a nuestro conocimiento de los determinantes de la tasa de crecimiento y del progreso tecnológico. El enfoque que adopta Xavier Sala y Martín en su libro "*Apuntes sobre el crecimiento económico*" se basa en la metodología y los conceptos desarrollados por los economistas neoclásicos de la segunda mitad del siglo XX. A partir del trabajo de Solow-Swan (1956), las décadas de 1950 y 1960 vieron como la revolución neoclásica llegaba a la teoría del crecimiento económico, y esta disfrutaba de un renacimiento que sentó las bases metodológicas utilizada no solo para la teoría del crecimiento sino también por todos los macroeconomistas modernos. El análisis neoclásico se completó con los trabajos de Cass (1965) y Koopmans (1965), que reintrodujeron el enfoque de la optimización intertemporal desarrollado por Ramsey (1928) para analizar el comportamiento de los consumidores en el modelo neoclásico.

El supuesto neoclásico de rendimientos decrecientes de cada uno de los factores tenía, como consecuencia devastadora, el hecho de que el crecimiento a largo plazo debido a la acumulación de capital era insostenible.

Es por ello que los investigadores neoclásicos se vieron obligados a introducir el progreso tecnológico exógeno, motor último del crecimiento a largo plazo. A principios de los años 70, la teoría del crecimiento económico murió sumida en su propia irrelevancia. Los macroeconomistas pasaron a investigar el ciclo económico y demás fenómenos del corto plazo, alentados por la revolución metodológica de las expectativas racionales y el aparente fracaso del hasta entonces dominante paradigna keynesiano.

La publicación en 1986 de la tesis doctoral de Paul Romer (escrita en 1983) y la consiguiente bendición de Robert Lucas (1988) hicieron renacer la teoría del crecimiento como campo de investigación activo.

Los nuevos investigadores tuvieron como objetivo crucial la construcción de modelos en los que a diferencia de los modelos neoclásicos, la tasa de crecimiento a largo plazo fuera positiva sin la necesidad de suponer que alguna variable del modelo crecía de forma exógena. De ahí que a estas nuevas teorías se les bautizara con el nombre de teorías de crecimiento endógeno.

Una primera familia de modelos (Romer (1986)), Lucas (1988), Rebelo (1991) y Barro (1991) consiguieron generar tasas positivas de crecimiento, a base de eliminar los rendimientos decrecientes a escala a través de externalidades o de introducir capital humano.

Un segundo grupo de aportaciones utilizó el entorno de competencia imperfecta para construir modelos en los que la inversión en investigación y desarrollo (I+D) de las empresas generaban progreso tecnológico de forma endógena. Algunos ejemplos de estos trabajos los encontramos en Romer (1987, 1990), Aghion y Howitt(1992, 1998) Grossman y Helpman (1991). En estos modelos la sociedad premia a las empresas investigadoras con el disfrute de poder monopolístico si estas consiguen inventar un nuevo producto o si consiguen mejorar la calidad de productos existentes.

En este tipo de entornos la tasa de crecimiento tiende a no ser óptima en Sentido de Pareto por lo que la intervención de los gobiernos es decisiva. En este sentido es deseable la aparición de los gobiernos que garanticen los derechos de propiedad física e intelectual, que regulen el sistema financiero y exterior y eliminen las distorsiones y que mantengan un marco legal que garantice el orden. El gobierno por tanto juega un papel importante en la determinación de la tasa de crecimiento a largo plazo.

Tema 1. Modelo Neoclásico de Crecimiento de Solow-Swam

A continuación describimos los supuestos del modelo de Solow-Swan.

Primer Supuesto. Función de producción neoclásica.

$$Y_t = F(K_t, L_t, A) \qquad (1)$$

Propiedades de la función de producción neoclásica.

i) Rendimientos constantes a escala. Es decir la función de producción es homogénea de grado uno.

$$F(\lambda K_t, \lambda L_t, A) = \lambda F(K_t, L_t, A)$$

Que la función de producción sea homogénea de grado uno significa que si el capital y el trabajo se multiplican por un número λ , entonces la producción total también se multiplica por λ .

ii) Rendimientos decrecientes del capital y del trabajo cuando estos se consideran por separado.

$$Pmg(l) = \frac{dY}{dL} > 0 \qquad \frac{d^2Y}{d^2L} < 0$$

$$Pmg(K) = \frac{dY}{dK} > 0 \qquad \frac{d^2Y}{d^2K} < 0$$

iii) Condiciones de Inada.

$$\underset{L \to 0}{limte} \quad \frac{dF}{dL} = \infty \qquad \underset{K \to 0}{limte} \quad \frac{dF}{dK} = \infty$$

$$\underset{L \to \infty}{limte} \quad \frac{dF}{dL} = 0 \qquad \underset{K \to \infty}{limte} \quad \frac{dF}{dK} = 0$$

0 0

Segundo Supuesto. Suponemos una economía cerrada, lo que implica que las exportaciones e importaciones son nulas.

Como la economía no comercia con el exterior en esta economía el producto interior bruto es igual al producto nacional bruto.

Tercer Supuesto. No hay gobierno, lo que implica que el gasto público es cero. Tampoco hay impuestos ni transferencias.

Al no haber impuesto (ni directos ni indirectos, y tampoco transferencias) el valor de la producción es igual a la renta.

$$Y_t = \mathrm{Pr}\,\textit{oducción} = \mathrm{Re}\,\textit{nta}$$

Bajo los supuestos establecidos en este modelo la producción total se reparte entre consumo e inversión.

$$Y_t = C_t + I_t \quad (2)$$

La renta de los agentes se dedica a consumir o a ahorrar:

$$Y_t = C_t + S_t$$

de lo que se deduce que en la economía descrita en este modelo la inversión es igual al ahorro:

$$I_t = S_t$$

Cuarto supuesto. Se supone que los consumidores ahorran una proporción constante de la renta.

$$S_t = sY_t$$

donde s denota la propensión marginal al ahorro.

Bajo este supuesto el consumo de las familias es igual a $(1-s)Y_t$.

Quinto Supuesto. Se supone que el stock de capital se deprecia a una tasa constante que denotamos por δ.

Sexto Supuesto. Se supone que el nivel de desarrollo tecnológico, que denotamos por A, se mantiene constante.

Séptimo Supuesto. La población crece a una tasa constante que denotamos por n.

En toda economía el stock de capital en $t+1$ es igual al stock de capital en t más la inversión bruta en capital fijo menos la depreciación:

$$K_{t+1} = K_t + I_t - \delta K_t$$

denotando la variación del stock de capital por $\dot{K}$ ($\dot{K} = K_{t+1} - K_t$) la inversión bruta se puede expresar como sigue:

$$\boldsymbol{I_t = \dot{K} + \delta\, K_t}$$

Bajo los supuestos establecidos por el modelo de Solow-Swan la ecuación (2) puede expresarse como:

$$\boldsymbol{Y_t = (1 - s)Y_t + \dot{K} + \delta\, K_t} \qquad (3)$$

Despejando $\boldsymbol{\dot{K}}$ de la ecuación (3) tenemos la ecuación que describe el comportamiento dinámico del stock de capital:

$$\dot{K} = sY_t - \delta K_t \qquad (4)$$

Ecuación que describe el comportamiento del stock de capital agregado.

El estudio del crecimiento económico nos interesa analizarlo en términos per cápita. Por ello expresamos el modelo de Solow-Swan en términos per cápita.

MODELO DE SOLOW-SWAN en términos per cápita.

Dividimos la expresión (4) por el número de trabajadores:

$$\frac{\dot{K}}{L} = \frac{sY_t}{L} - \frac{\delta K_t}{L} \qquad (5)$$

definimos el stock de capital per cápita como: $k = \frac{K}{L}$

$$\Rightarrow \dot{k} = \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{LL} = \frac{\dot{K}}{L}\frac{L}{L} - \frac{K}{L}\frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{K}}{L} - k\,n \qquad (6)$$

Despejamos de la ecuación (6) y tenemos:

$$\frac{\dot{K}}{L} = \dot{k} + k\,n \qquad (7)$$

Sustituimos (7) en (5):

$$\dot{k} + k\,n = sy - \delta\, k \qquad (8)$$

$\dot{k} = sy - (\delta + n)k$ (9) Ley de evolución del capital per cápita

Suponemos que la función de producción es la siguiente. $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, que en términos per cápita se puede escribir como:

$$y = Ak^{\alpha}$$

Sustituimos en la expresión (9):

$$\dot{k} = sAk^{\alpha} - (\delta + n)k$$

2. Análisis del crecimiento en el contexto del modelo de Solow-Swan.

Al hablar de crecimiento a largo plazo nos estamos refiriendo a la tasa de crecimiento medio de una economía durante un período de tiempo relativamente amplio y nos preguntamos cuales son los determinantes de dicha tasa.

Para responder a esta pregunta debemos calcular, en el contexto de este modelo, cual es la tasa de crecimiento a largo plazo de la economía (producción o renta per cápita).

En un modelo económico, la tasa de crecimiento a largo plazo (que conceptualmente es la tasa de crecimiento medio a lo largo del tiempo) es la tasa de crecimiento de la economía (PIB o producción) en *estado estacionario*.

El *estado estacionario* es una situación en la que todas las variables per cápita del modelo crecen a una tasa constante.

Nos preguntamos ahora cual es la tasa de crecimiento a largo plazo del capital per cápita.

$$\boldsymbol{\dot{k} = sAk^{\alpha} - (n + \delta)k}$$

$$\boldsymbol{\gamma_k = \frac{\dot{k}}{k} = sAk^{\alpha-1} - (n + \delta)}$$

En **estado estacionario** γ_k debe ser constante. Para que el stock de capital crezca a una tasa constante, el stock de capital per cápita debe ser siempre el mismo.

$$\gamma_k = \frac{\dot{k}}{k} = 0$$

Vamos a demostrar que en el contexto de este modelo, el PIB per cápita, y el consumo per cápita crecen a largo plazo a la misma tasa que el stock de capital, es decir crecen a una tasa nula.

Para ello partimos de la función de producción per cápita:

$$y = f(A,k)$$

$$\dot{y} = \frac{df}{dA}\frac{dA}{dt} + \frac{df}{dk}\frac{dk}{dt} \qquad \dot{y} = \frac{df}{dA} \times 0 + \frac{df}{dk}\dot{k} \qquad \dot{y} = \frac{df}{dk}\dot{k}$$

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\frac{df}{dk}\dot{k}}{f(A,k)} \qquad (10)$$

Teniendo en cuanta que en estado estacionario el stock de capital no cambia tampoco lo hace el PIB per cápita. $\frac{\dot{y}}{y} = 0$.

La tasa de crecimiento del consumo privado a largo plazo es también nula cmo se muestra a continuación:

$$\dot{c} = \frac{dc}{dy}\frac{dy}{dt} = (1-s)\dot{y}$$

$$\lambda_c = \frac{\dot{c}}{c} = \frac{(1-s)\dot{y}}{(1-s)y} = \gamma_y = 0$$

En el caso particular de una función de producción Cobb-Duglas la expresión (10) queda como:

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\alpha A k^{\alpha-1}\dot{k}}{Ak^{\alpha}} = \alpha\frac{\dot{k}}{k} = 0$$

La tasa de crecimiento del consumo per cápita a largo plazo vendrá dada por al siguiente expresión:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{(1-s)\alpha A k^{\alpha-1}\dot{k}}{(1-s)Ak^{\alpha}} = \alpha\frac{\dot{k}}{k} = 0$$

Así, hemos demostrado que en el contexto del modelo de Solow-swan las variables per cápita (PIB, capital y consumo) crecen a largo plazo a una tasa nula.

$$\gamma_k = \gamma_y = \gamma_c = 0$$

…El modelo de Solow-Swan nos viene a decir que el producto per cápita, el consumo per cápita y el capital per cápita **NO CRECEN** a largo plazo. Así este modelo nos dice que el producto por persona es constante a largo plazo. Este es tanto como decir que en una economía el nivel de producción media por persona es igual en una década que en otra. Obviamente este resultado no es validado por los datos que muestran como a lo largo de un siglo XX los niveles de producción medios por persona han cambiado mucho desde principios a finales del siglo XX.

En este sentido el modelo de Solow-Swan es insatisfactorio, ya que no explica cuales son los determinantes del crecimiento económico.

Calculamos ahora la tasa de crecimiento a largo plazo del capital, el PIB y el consumo en términos agregados.

1) Según este modelo, en estado estacionario (a largo plazo) el stock de capital agregado crece a la misma tasa que la población.

Demostración:

$$\gamma_{K} = \frac{\dot{K}}{K} = n$$

$$k = \frac{K}{L} \qquad \dot{k} = \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{LL} = \frac{\dot{K}}{L} - k\frac{\dot{L}}{L} \qquad \dot{k} = \frac{\dot{K}}{L} - kn$$

$$\gamma_{k} = \frac{\dot{k}}{k} = \left(\frac{\dot{K}}{L} - kn\right) / k$$

$$\gamma_{k} = \left(\frac{\dot{K}L}{LK} - n\frac{K}{L}\frac{L}{K}\right) = \gamma_{K} - n$$

si $\gamma_{k} = 0$ entonces $\gamma_{K} = n$

2) Según este modelo, en estado estacionario (a largo plazo) la tasa de crecimiento de la producción agregada es igual a la tasa de crecimiento de la población.

Demostración:

$$\gamma_{Y} = \frac{\dot{Y}}{Y} = n$$

$$Y_{t} = AK_{t}^{\alpha} L_{t}^{1-\alpha}$$

$$\dot{Y}_{t} = \frac{dY}{dK}\frac{dK}{dt} + \frac{dY}{dL}\frac{dL}{dt}$$

$$\dot{Y}_t = \alpha A K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} \frac{dK}{dt} + (1-\alpha) K_t^{\alpha} L_t^{-\alpha} \frac{dL}{dt}$$

$$\gamma_Y = \frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = \alpha\lambda_K + (1-\alpha)\gamma_L$$

$$\gamma_Y = \frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = \gamma_L = n$$

3) Según este modelo, en estado estacionario (a largo plazo) la tasa de crecimiento del consumo agregado es igual a la tasa de crecimiento de la población.

Demostración:

$$\gamma_C = \frac{\dot{C}}{C} = n$$

$$C_t = (1-s)Y_t$$

$$\dot{C}_t = (1-s)\frac{dY}{dt}$$

$$\gamma_C = \frac{\dot{C}_t}{C_t} = \frac{(1-s)\dot{Y}_t}{(1-s)Y_t} = \gamma_Y = n$$

En estado estacionario las variables per cápita (consumo, PIB y capital) crecen a una tasa nula. Las variables PIB, consumo y capital agregadas crecen a largo plazo a la misma tasa que la población.

Aunque este modelo no nos dice nada sobre cuales son los determinantes del crecimiento económico a largo plazo, nos revela información importante sobre las variables o factores que pueden hacer que el bienestar de las familias a largo plazo sea más alto.

Para saber que variables afectan positivamente al bienestar a largo plazo analizamos de que variables depende el PIB per cápita, el consumo per cápita y el capital per cápita a largo plazo, es decir en estado estacionario.

3. PIB, Consumo y Capital per cápita de estado estacionario (Largo plazo).

Estado estacionario: $\gamma_k = \frac{\dot{k}}{k} = cte$

Calculamos la tasa de crecimiento del capital per cápita:

$$\gamma_k = \frac{\dot{k}}{k} = sAk^{\alpha-1} - (\delta + n)$$

La tasa de crecimiento del capital es constante en estado estacionario, si y solo si, el stock de capital per cápita es constante. Si el capital es constante en estado estacionario, la tasa de crecimiento del capital es nula:

Así, tenemos que en estado estacionario, $\gamma_k = \frac{\dot{k}}{k} = 0$

$$sAk^{\alpha-1} = (\delta + n)$$

$$\boldsymbol{k}^* = \left[\frac{\boldsymbol{sA}}{(\delta + \boldsymbol{n})}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$ Stock de capital de estado estacionario.

$$\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{A}\left[\frac{\boldsymbol{sA}}{(\delta + \boldsymbol{n})}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$ PIB per cápita de estado estacionario

$$\boldsymbol{c}^* = (1 - \boldsymbol{s})\boldsymbol{A}\left[\frac{\boldsymbol{sA}}{(\delta + \boldsymbol{n})}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$ Consumo per cápita de estado estacionario

Observamos que el PIB per cápita de estado estacionario depende de las siguientes variables: el nivel de desarrollo tecnológico A; la tasa de ahorro de los agentes s; la tasa de crecimiento de la población n y la tasa de depreciación del capital físico δ.

El PIB por persona depende positivamente de la tasa de ahorro y el nivel de desarrollo tecnológico y negativamente de la tasa de crecimiento de la población y la tasa de depreciación del capital.

De acuerdo con estos resultados *¿qué medidas de política económica debería implementar el gobierno preocupado por aumentar los niveles de renta per cápita a* *largo plazo*? : (i) fomentar la inversión de las empresas en investigación y desarrollo; (ii) controlar la tasa de natalidad (iii) fomentar el ahorro de las familias.

El consumo per cápita de estado estacionario depende de las siguientes variables: el nivel de desarrollo tecnológico A; la tasa de ahorro de los agentes s; la tasa de crecimiento de la población n y la tasa de depreciación del capital físico δ.

El consumo por persona depende positivamente del nivel de desarrollo tecnológico y negativamente de la tasa de crecimiento de la población y la tasa de depreciación del capital. *¿Cómo afecta al consumo a largo plazo un aumento de la tasa de ahorro?.*

Para responder a esta pregunta analizamos la relación mantenida entre dichas variables: consumo y ahorro.

$$\frac{\partial \boldsymbol{c}^*}{\partial \boldsymbol{s}} = -\boldsymbol{y}^* + (1-\boldsymbol{s})\frac{\partial \boldsymbol{y}^*}{\partial \boldsymbol{s}}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{y}^*}{\partial \boldsymbol{s}} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\boldsymbol{A}\left(\frac{\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{n}+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1}\frac{1}{\boldsymbol{n}+\delta} > 0$$

$$\frac{\partial y^*}{\partial s} = -y^* + (1-s)\left[\frac{\alpha}{1-\alpha}A\left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1}\frac{A}{n+\delta}\right] \quad (11)$$

El primer término de la ecuación (11) es negativo mientras que el segundo término de dicha expresión es positivo. *Así pues no está claro que un aumento de la tasa de ahorro lleve asociado un aumento del consumo a largo plazo.*

4. Stock de capital de la Regla de Oro

En la sección anterior calculamos el stock de capital, consumo y PIB per cápita de estado estacionario. En dicha sección vimos que un aumento de la tasa de ahorro no genera necesariamente un mayor nivel de consumo a largo plazo.

En esta sección vamos a ver que existe una tasa de ahorro optima, o lo que es lo mismo que hay una tasa de ahorro para la cual el consumo a largo plazo es máximo.

Para ello analizamos previamente la relación mantenida entre el stock de capital y el consumo de estado estacionario. De forma consistente con la sección anterior vamos a comprobar que un aumento de la inversión no tiene porque generar siempre un mayor nivel de consumo a largo plazo. Analizamos primero la relación entre el capital per cápita y el consumo de largo plazo.

De la ley de evolución del capital per cápita obtenemos la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{c}^* = \boldsymbol{y}^* - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{n}+\delta)$$

supuesto una función de producción tipo Cobb-Douglas:

$$\boldsymbol{c}^* = \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{k}^*\right)^{\alpha} - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{n}+\delta)$$

El consumo de las familias se calcula como la diferencia entre la producción y el ahorro

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{Ak}) - \boldsymbol{s}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Ak})$$

se puede observar que el consumo depende del stock de capital. Para analizar como varía el consumo cuando cambia el stock de capital analizamos el signo de la derivada:

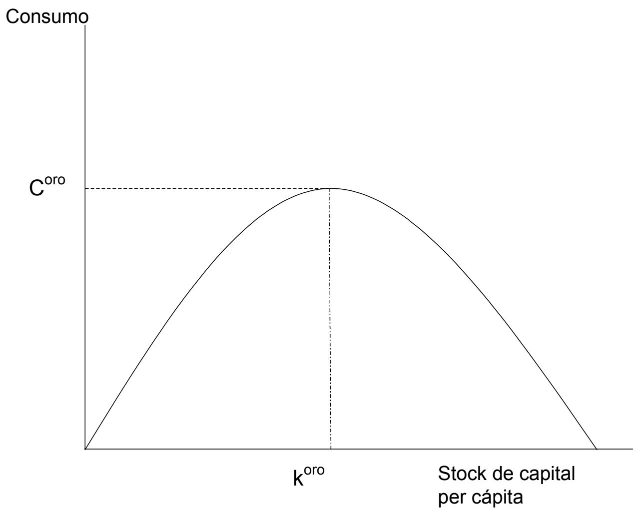
análisis de signo:

1) $\dfrac{\partial \boldsymbol{c}^*}{\partial \boldsymbol{k}} = \alpha \boldsymbol{A}\boldsymbol{k}^{*\alpha-1} - (\boldsymbol{n}+\delta) > 0 \quad \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{k} < \left[\dfrac{\alpha \boldsymbol{A}}{\boldsymbol{n}+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$, cuando el stock de capital es menor al capital de la regla de oro, el consumo aumenta con el stock de capital.

2) $\dfrac{\partial \boldsymbol{c}^*}{\partial \boldsymbol{k}} = \alpha \boldsymbol{A}\boldsymbol{k}^{*\alpha-1} - (\boldsymbol{n}+\delta) = 0 \quad \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{k} = \left[\dfrac{\alpha \boldsymbol{A}}{\boldsymbol{n}+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$, cuando el stock de capital es igual a $\left(\dfrac{\alpha A}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ (lo que se denomina capital de la regla de oro) el cosnumo se hace máximo.

3) $\dfrac{\partial \boldsymbol{c}^*}{\partial \boldsymbol{k}} = \alpha \boldsymbol{A}\boldsymbol{k}^{*\alpha-1} - (\boldsymbol{n}+\delta) < 0 \quad \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{k} > \left[\dfrac{\alpha \boldsymbol{A}}{\boldsymbol{n}+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$, cuando el stock de capital es superior al de la regla de oro el consumo disminuye cuando el capital aumenta, y viceversa.

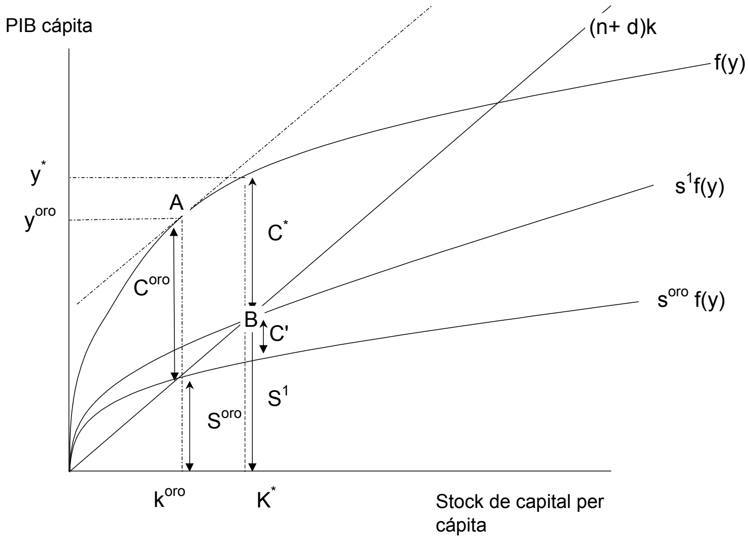
En la figura 1. Se muestra la relación entre el capital de estado estacionario y el consumo de las familias.



Así, si una economía tiene un stock de capital superior a $\left(\frac{\alpha A}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, entonces sabemos que incentivar el ahorro (lo que hará que aumente la inversión) llevará a un menor consumo a largo plazo. Como hemos señalado, a la derecha del capital de la regla de oro hay una relación inversa entre consumo y capital, más capital implica menor consumo a largo plazo y por lo tanto menor bienestar.

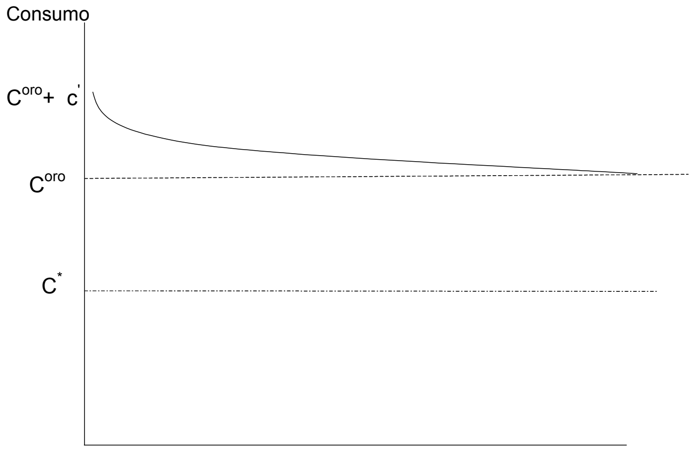
Si la economía tienen un stock de capital superior al de la regla de oro y se reduce el ahorro, y con ello el capital per cápita el consumo aumentará.

Gráficamente se puede justificar de la siguiente forma:



Del punto (2) se sabe que el stock de capital de la regla de oro es aquel en el que la pendiente de la función de producción es igual a la suma de la tasa de crecimiento de la población y la tasa de depreciación (punto A).
Para ese stock de capital la diferencia entre el ahorro y la producción es el consumo de la regla de oro. Es el máximo consumo que pueden obtener los agentes dados los parámetros estructurales de la economía.
Si una economía se encuentra en el punto B, la tasa de ahorro es s^1, el consumo es c^* y la producicón y^*. En este punto, se puede ver gráficamente que el consumo es menor al de la regla de oro, que por definición es el máximo. Si la tasa de ahorro disminuye y pasa de s^1 a s^{oro}, el cosnumo de largo plazo aumenta desde c^* a c^{oro}.

Gráficamente el efecto que sobre el consumo a la argo plazo tendra una reducción de la tasa de ahorro es el siguiente:



Hemos visto que hay un nivel de capital , que llamamos stock de capital de la regla de oro que hace máximo el consumo de los agentes a largo plazo. La pregunta que nos hacemos ahora es la siguiente: ¿Cuál es la tasa de ahorro que hace máximo el consumo de largo plazo?.

…....

5. Modelo de Solow-Swan con progreso tecnológico exógeno

Partimos de la identidad de contabilidad nacional:

$$\boldsymbol{Y_t = C_t + I_t + G_t + X_t - M_t}$$

donde, Y_t representa el PIB, C_t representa el consumo privado, I_t representa la inversión, G_t representa el gasto público, X_t y M_t representan respectivamente las exportaciones e importaciones.

Dados los supuestos del modelo de Solow-Swan sabemos que:

$$\boldsymbol{G_t = X_t = M_t} = 0$$

lo que implica que:

$$\boldsymbol{Y_t = C_t + I_t}$$

Como no hay sector público, no hay impuestos, y por tanto la producción es igual a la renta. La renta en la economía se destina o bien a consumo o bien a ahorro, que denotamos por la letra S_t.

$$\boldsymbol{Y_t = C_t + S_t}$$

lo que implica que el ahorro en la economía es igual a la inversión.

$$\boldsymbol{I_t = S_t}$$

La variación en el stock de capital es igual a la inversión neta de depreciación.

$$\boldsymbol{K_{t+1} = K_t + I_t - \delta K_t}$$

$$\boldsymbol{\dot{K}_{t+1} = I_t - \delta K_t}$$

$$\boldsymbol{\dot{K}_{t+1} = sY_t - \delta K_t} \quad (12) \quad \textit{Ley de evolución del capital agregado.}$$

Nos interesa obtener la ecuación que describe el comportamiento de stock de capital per cápita. Para ello dividimos la expresión (12) por la cantidad de trabajo efectivo, que es: $\boldsymbol{A_t L_t}$.

Dividimos la expresión (12) por la cantidad de trabajo efectivo:

$$\boldsymbol{\frac{\dot{K}_{t+1}}{AL} = \frac{sY_t}{AL} - \frac{\delta K_t}{AL}} \quad (13)$$

definimos el stock de capital per cápita por unidad de trabajo efectivo:

$$\hat{k} = \frac{K}{AL}$$

$$\dot{\hat{k}} = \frac{\dot{K}AL - K(\dot{A}L + A\dot{L})}{(AL)^2} = \frac{\dot{K}}{AL}\frac{AL}{AL} - \frac{K}{AL}\left(\frac{\dot{A}}{A}\frac{L}{L} + \frac{A\dot{L}}{AL}\right) = \frac{\dot{K}}{AL} - \hat{k}(x_a + n) \qquad (14)$$

donde x_a es la tasa de crecimiento de la tecnología, n es la tasa de crecimiento de la población y $\hat{k}$ es el capital per cápita por unidad de trabajo efectivo.

Despejamos de la ecuación (12) y tenemos:

$$\frac{\dot{K}}{AL} = \dot{\hat{k}} + \hat{k}\,(x_a + n) \quad (15)$$

Sustituimos (15) en (12):

$$\dot{\hat{k}} + \hat{k}(x_a + n) = s\,\hat{y} - \delta\,\hat{k} \qquad (16)$$

donde $\hat{y}$ la producción por unidad de trabajo efectivo.

$\dot{\hat{k}} = s\,\hat{y} - \hat{k}(x_a + n + \delta)$ (17) *Ley de evolución del capital per cápita por unidad de trabajo efectivo*.

5.1 Resultados del modelo de Solow_Swan en el largo plazo

El estado estacionario es una situación en la que las variables per cápita de la economía crecen a una tasa constante. A partir de la ecuación (17) calculamos la tasa de crecimiento del stock de capital por unidad de trabajo efectiva:

$$\gamma_K = \frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = cte$$

$$\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = \frac{s\,\hat{y}}{\hat{k}} - (x_a + n + \delta) \qquad (18)$$

Suponemos que la función de producción es la siguiente. $Y = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}$, que en términos per cápita se puede escribir como:

$$\hat{y} = \hat{k}^{\alpha}$$

Sustituimos en la expresión (18):

$$\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = s\,\hat{k}^{\alpha-1} - (x_a + n + \delta)$$

La tasa de crecimiento del capital es constante en estado estacionario, si y solo si, el stock de capital per cápita por unidad de trabajo efectivo es constante. Si el capital es constante en estado estacionario, la tasa de crecimiento del capital es nula:

Así, tenemos que en estado estacionario, $\gamma_K = \frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = 0$

$$s\hat{k}^{\alpha-1} = (\delta + n + x_a)$$

$\hat{k}^* = \left[\frac{s}{(\delta + n + x_a)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$ Stock de capital por unidad de trabajo efectivo de estado estacionario.

$\hat{y}^* = \left[\frac{s}{(\delta + n + x_a)}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ PIB per cápita por unidad de trabajo efectivo de estado estacionario

$c^* = (1-s)\left[\frac{s}{(\delta + n + x_a)}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ Consumo per cápita por unidad de trabajo efectivo de estado estacionario

5.2 Tasa de crecimiento del PIB, capital y consumo per cápita en estado estacionario

(i) Tasa de crecimiento del PIB per cápita

$\hat{y} = \frac{y}{A}$ $\qquad \gamma_{\hat{y}} = \frac{\dot{\hat{y}}}{\hat{y}}$ $\qquad$ En estado estacionario $\gamma_{\hat{y}} = 0$.

$$\gamma_{\hat{y}} = \frac{\dot{\hat{y}}}{\hat{y}} = \frac{1}{\hat{y}}\left(\frac{\dot{y}A}{A\,A} - \frac{y(\dot{A})}{A\,A} \right)$$

$$\gamma_{\hat{y}} = \frac{\dot{\hat{y}}}{\hat{y}} = \frac{1}{\hat{y}}\left(\frac{\dot{y}}{A} - \hat{y}\frac{(\dot{A})}{A} \right) = \left(\frac{\dot{y}}{y} - x_a \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{y}}{y} = x_a$$

(ii) Tasa de crecimiento del consumo per cápita

$$\hat{c} = \frac{c}{A}$$

$$\dot{\hat{c}} = \frac{\dot{c}\,A + c\dot{A}}{A^2} = \frac{\dot{c}}{A} + \frac{c}{A}\frac{\dot{A}}{A}$$

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{\dot{c}}{A}\frac{A}{c} + \frac{c}{A}\frac{\dot{A}}{A}\frac{A}{c} = \frac{\dot{c}}{c} + \frac{\dot{A}}{A} = 0 \qquad \frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{A}}{A} = x_a$$

(iii) Tasa de crecimiento del stock de capital per cápita

$$\hat{k} = \frac{k}{A}$$

$$\dot{\hat{k}} = \frac{\dot{k}\,A + k\dot{A}}{A^2} = \frac{\dot{\hat{k}}}{A} + \frac{k}{A}\frac{\dot{A}}{A}$$

$$\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = \frac{\dot{k}}{A}\frac{A}{\hat{k}} + \frac{k}{A}\frac{\dot{A}}{A}\frac{A}{k} = \frac{\dot{k}}{k} + \frac{\dot{A}}{A} = 0 \qquad \frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{A}}{A} = x_a$$

Según este modelo, la producción por persona crece a la largo plazo a la misma tasa que el progreso tecnológico.

La conclusión a la que hemos llegado es bastante importante: la economía neoclásica puede tener crecimiento positivo a largo plazo si la tecnología crece. La pregunta que debe surgir de forma inmediata es: ¿ cómo podemos acelerar el progreso tecnológico de tal forma que aumente la tasa a la que crece la tecnología?.

Hasta ahora hemos supuesto que el progreso tecnológico era exógeno en el sentido de que no surgía de la inversión en I +D de las empresas o del esfuerzo investigador de nadie. Simplemente el nivel tecnológico aumentaba constantemente sin explicar por qué. Si dejamos las cosas así, debemos concluir que el modelo neoclásico de crecimiento explica muchas cosas pero deja una cosa importante sin explicar: ¡EL CRECIMIENTO ECONÓMICO!

El modelo dice que la única fuente de crecimiento a largo plazo debe ser el progreso tecnológico, pero no explica de donde surge ese progreso tecnológico.

6. Resumen y conclusiones

El modelo de Solow-Swan no es capaz de explicar cuales son los determinantes del crecimiento económico a largo plazo. Según este modelo, a largo plazo, o lo que es lo mismo en términos medios los niveles de renta per cápita, consumo y capital no cambian.

- ✓ La inversión en capital no hace crecer a una economía. Este resultado va en contra de la intuición que uno tendría, ya que tendemos a pensar que más capital implica más crecimiento. *Este resultado se obtiene debido al supuesto realizado sobre la función de producción.*
- ✓ Este modelo no nos dice nada sobre cuales son los determinantes del crecimiento económico pero nos da información importante a cerca de las variables o factores que afectan positivamente a loa niveles de renta y bienestar a largo plazo.
- ✓ La renta media por persona depende positivamente de variables como: la tecnología, la tasa de ahorro de las familias y el stock de capital per cápita.
- ✓ La renta media por persona depende negativamente de la tasa de crecimiento de la población y de la tasa de depreciación del capital.
- ✓ El bienestar de los consumidores (medido por el consumo) está relacionado positivamente con la tecnología y negativamente con la tasas de crecimiento de la población y la tasa de depreciación del capital per cápita. Respecto a la tasa de ahorro y el stock de capital per cápita cabe decir que un aumento de la tasa de ahorro no implica necesariamente un mayor nivel de consumo a largo plazo. Tampoco un aumento del stock de capital implica mayor consumo a largo plazo.
- ✓ Hay una tasa de ahorro y un stock de capital que hacen máximo el consumo. A ese stock de capital se le llama stock de capital de la regla de oro.
- ✓ Políticas fiscales encaminadas a incentivar al ahorro y la inversión pueden tener efectos negativos sobre el bienestar a largo plazo.
- ✓ Si la tecnología crece a una tasa constante, entonces podemos explicar el crecimiento económico. En este caso podremos decir que las economías crecen porque crece la tecnología.