Tema 4. El crecimiento exógeno de la productividad.

4.1 El modelo neoclásico con progreso tecnológico

$$Max \quad \int_0^{\infty} e^{-(\rho-n)t} \frac{(\hat{c}e^{xt})^{1-\theta}-1}{1-\theta}dt$$

La renta de los consumidores es la suma de los ingresos del trabajo e ingresos del capital: $wL_t + rB_{t-1}$. Con la renta de que disponen los consumidores pueden ahorrar o consumir, de tal forma que:

$$S_t + C_t = wAL_t + rB_{t-1}$$

El ahorro de las familias es igual a:

$$B_{t+1} = B_t + S_t$$

$$\dot{B} = S_t$$

Podemos escribir la restricción presupuestaria de las familias:

$$\dot{B} = wAL + rB - C$$

Expresamos la restricción presupuestaria de las familias en unidades de trabajo efectivo:

$$\frac{\dot{B}}{AL} = w + r\frac{B}{AL} - \frac{C}{AL} \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{B}}{AL} = w + r\hat{b} - \hat{c} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\frac{\dot{B}}{AL} = w + r\frac{B}{AL} - \frac{C}{AL} \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{B}}{AL} = w + r\hat{b} - \hat{c}$$

definimos $\hat{b} = \frac{B}{AL}$ como activos por unidad de trabajo efectivo, y lo derivamos respecto al tiempo**:**

$$\dot{\hat{b}} = \frac{\dot{B}AL - B(\dot{A}L + A\dot{L})}{AL\ AL} = \frac{\dot{B}}{AL} - \hat{b}(x+n) \qquad \textbf{(2)}$$

Sustituimos (2) en (1) y despejamos $\dot{\hat{b}}$:

$$\frac{\dot{B}}{AL} = \dot{\hat{b}} + \hat{b}(x+n)$$

$$\dot{\hat{b}} = w + r\hat{b} - \hat{c} - \hat{b}(x+n)$$

: $\dot{\hat{b}} = w - \hat{c} + \hat{b}(r - x - n)$ restricción presupuestaria expresada en unidades de trabajo efectivo:

4. 1 Problema del consumidor

$$\begin{aligned} &Max \quad \int_0^\infty e^{-(\rho-n)t} \frac{(\hat{c}e^{xt})^{1-\theta} - 1}{1-\theta} dt \\ &s.a: \quad \dot{\hat{b}} = w - \hat{c} + \hat{b}(r - x - n) \end{aligned}$$

Definimos el hamiltoniano:

$$H = \int_0^\infty e^{-(\rho-n)t} \frac{(\hat{c}e^{xt})^{1-\theta} - 1}{1-\theta} dt + v(w - \hat{c} + \hat{b}(r - x - n))$$

c.p.o.

$$\frac{\partial H}{\partial \hat{c}} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{[-(\rho-n)-x\theta]t} \hat{c}^{-\theta} = v \qquad (3)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \hat{b}} = -\dot{v} \quad \Rightarrow \quad v(r - n - x) = -\dot{v} \qquad (4)$$

derivamos (3) respecto a t:

$$(-(\rho-n) - x\theta)e^{(-(\rho-n)-x\theta)t} \hat{c}^{-\theta} - \theta \hat{c}^{-\theta} \frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} e^{(-(\rho-n)-x\theta)t} = \dot{v} \qquad \textbf{(5)}$$

Dividimos (5) por (3):

$$\frac{\dot{v}}{v} = (n - \rho - x\theta) - \theta \frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} \qquad (6)$$

Igualamos la expresión (6) a la expresión (4):

$$(n-\rho-x\theta)-\theta\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}}=-(r-n-x) \qquad (7)$$

despejamos de (7) la tasa de crecimiento del consumo privado:

$\gamma_{\hat{c}}=\frac{1}{\theta}\left[(r-\rho-x(1+\theta))\right]$**:** evolución del consumo por unidad de trabajo efectivo.

Tendiento en cuenta que : $f^{'}(\hat{k})=r+\delta$**,** que se verá en la siguiente sección, despejamos r tenemos**:** $r=f^{'}(\hat{k})-\delta$**.** Si sustituimos en la ecuación que describe el comportamiento del consumo nos queda que:

$$\gamma_{\hat{c}}=\frac{1}{\theta}\left[(f\ \ (\hat{k})-\delta'-\rho-x(1+\theta))\right]$$

$$\gamma_{\hat{c}}=\frac{1}{\theta}\left[(f^{''}(\hat{k})-(\delta+\rho+x(1+\theta))\right]$$

y dado que $x\times\theta\approx 0$

$$\gamma_{\hat{c}}=\frac{1}{\theta}\left[(f^{'}(\hat{k})-(\delta+\rho+x)\right]$$

4.2 Problema de la Empresa

Definimos los beneficios de la empresa en términos de unidades de trabajo efectivo:

$$\frac{\Pi}{AL}=f(\hat{k})-w-(r+\delta)\frac{K}{AL}$$

Decisión de inversión de la empresa:

$$Max: \quad \hat{\pi}=f(\hat{k})-w-(r+\delta)\hat{k}$$

$$c.p.o: \quad \frac{\partial\hat{\pi}}{\partial\hat{k}}=0 \quad \Rightarrow \quad f^{'}(\hat{k})=r+\delta \qquad (8)$$

Decisión de contratación de la empresa:

$$Max \quad \Pi = ALf(\hat{k}) - wAL - (r+\delta)K$$
$$c.p.o: \quad \frac{\partial \Pi}{\partial L} = 0 \quad \Rightarrow \quad Af(\hat{k}) + AL\frac{\partial f}{\partial \hat{k}}\frac{\partial \hat{k}}{\partial L} - wA = 0$$

$$Af(\hat{k}) - ALf^{'}(\hat{k})\hat{k}\frac{1}{L} = Aw \quad \Rightarrow \quad \left[f(\hat{k}) - f^{'}(\hat{k})\hat{k}\right] = w \qquad (9)$$

Imponemos las condiciones de vaciado de mercado: $\hat{b} = \hat{k}$. La restricción presupuestaria del consumidor queda como:

$$\dot{\hat{k}} = w - \hat{c} + \hat{k}(r - x - n)$$
$$\dot{\hat{k}} = (f(\hat{k}) - f^{'}(\hat{k})\hat{k}) - \hat{c} + \hat{k}(r - x - n)$$

$$\dot{\hat{k}} = (f(\hat{k}) - (r+\delta)\hat{k}) - \hat{c} + \hat{k}(r - x - n)$$

$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - \hat{k}(\delta + x + n)$**:** ley de evolución del capital por unidad de trabajo efectivo.

$\gamma_{\hat{c}} = \frac{1}{\theta}\left[(f^{'}(\hat{k}) - (\delta + \rho + x)\right]$**:** evolución del consumo por unidad de trabajo efectivo