LÍNEAS DEL TRABAJO FIN DE GRADO EN MATEMÁTICAS

Línea: Análisis Matemático

1. Bases de Riesz y frames en espacios de Hilbert: teoría de muestreo y wawelets

Profesora: Maria José Muñoz Bouzo

El primer objetivo principal es llevar a cabo un estudio introductorio de las bases de Riesz y de los frames en un espacio de Hilbert separable. Ambos conceptos extienden el concepto de base ortonormal en el siguiente sentido: se estudia el problema de recuperar, no siempre de manera única, un elemento del espacio de Hilbert a partir de los elementos de una sucesión del espacio.

Aplicando lo anterior y como segundo objetivo se estudian sucesiones en espacios de Hilbert concretos: se aplican los conceptos anteriores, a la teoría de muestreo en espacios de Paley-Wiener y más en general a los espacios invariantes por translación.

Finalmente se estudiará un método sobre cómo construir bases ortonormales de wawelets en $L^2(R)$, a partir de un análisis multirresolución.

2.Transformación Conforme

Profesor: Arturo Fernández Árias

El teorema central de la transformación conforme es el célebre Teorema de Riemann que a.rma que todo dominio simplemente conexo del plano complejo es conformemente equivalente al disco unidad o al plano complejo. Este teorema se demuestra solamente en el 2??ciclo del grado.
Se proponen diferentes cuestiones sobre este teorema. 1. Comportamiento en la frontera de la transformación de Riemann asociada a un dominio simplemente conexo. 2. Descripción de las transformaciones de Riemann asociadas a dominios simples del plano, por ejemplo círculos y semiplanos que viene dadas por las llamadas Transformaciones de Möbius, polígonos, que vienen dadas por las llamada Tranformación de Schwarz Christo¤el. 3. Un estudio más avanzado de las Transformaciones de Möbius.

3. Aproximación polinomial y por funciones racionales de las funciones analíticas.

Profesor: Arturo Fernández Árias

Es una cuestión natural aproximar funciones analíticas por funciones más sencillas como polinomios o funciones racionales. Ha sido tratada extensivamente en la literatura. Un primer ejemplo fundamental es el Polinomio de Taylor. Proponemos el estudio de diversos resultados importantes en este tema como el Teorema de Runge, Teorema de Merguelian, Teorema de Müntz.

4. Cuestiones y ampliaciones sobre espacios normados

Profesor: Fidel Jose Fernández y Fernández-Arroyo

Se pretende, manejando tanto ideas generales como ejemplos concretos, primero afianzar conceptos y temas de la asignatura de ***Espacios Normados*** del Grado; y después, ampliar distintos resultados a contextos diferentes, a menudo más generales, insistiendo en las relaciones entre las situaciones consideradas. Se dará importancia a la comprensión correcta, y se podrán poner ejercicios para comprobarla.

5. Medida e integración

Profesor: Angel Garrido Bullón

1) Clases de Conjuntos. Anillos de Conjuntos: propiedades. Un anillo de intervalos. Algebras de Conjuntos. Clases Monótonas. Espacios Medibles. Medidas aditivas sobre un anillo. Espacios de Medida. Teorema de extensión de Hans Hahn. Extensiones de medida σ-finitas. Medida de Lebesgue-Stieltjes sobre la recta real. Medida de Lebesgue sobre **R**.
2) Funciones medibles. Propiedades de tales funciones. Teorema de Egorov. Convergencia en medida.
3) Integración. Integrales de funciones no-negativas. Aditividad de la integral con respecto del integrando. Teoremas de convergencia. Propiedades de la integral. Teorema de Lebesgue de la Convergencia Dominada.
4) Los Teoremas of Fubini. Producto de espacios medibles. Medida de Lebesgue sobre $\mathbf{R}^n$. Productos tensoriales de medidas. Teoremas de Fubini y de Tonelli-Hobson. Complección de medidas producto.
5) Espacios de Lebesgue.

6) Introducción a los Conjuntos Borrosos (Fuzzy sets) y a las Medidas Difusas (Fuzzy Measures). Sus propiedades y aplicaciones.

Nota:

Se intentará que revisen y amplíen sus conocimientos sobre estos temas, a los que añadiremos un resumen de lo que actualmente se está investigando para conseguir generalizar estos resultados clásicos (como son los teoremas de Lusin, el de Hahn-Banach, el de Banach-Steinhaus, etc.), pero en versión “fuzzy”.

Línea: Algebra

1. Diseños Combinatorios

Profesor : Ernesto Martínez

La teoría de los Diseños combinatorios es una parte de la Combinatoria. Estudia la existencia, construcción y propiedades de conjuntos finitos que satisfacen determinadas condiciones. En cierto sentido, puede considerarse un Diseño combinatorio como una generalización de un grafo.

Esta teoría tiene multitud de aplicaciones en diseño de experimentos, geometrías finitas, calendarios de competiciones deportivas, problemas de asignación, criptografía, diseño de algoritmos, redes, etc.

Los requisitos matemáticos requeridos son: tener un buen conocimiento de

- Los conceptos y métodos básicos de Teoría de Grafos y de Combinatoria.
- Las propiedades y operaciones con matrices; isomorfismos.
- Planos proyectivos y planos afines.
- Grupos finitos.
- Estructura y propiedades de cuerpos.

Estos temas se han estudiado en las asignaturas de Matemática Discreta, Álgebra Lineal I y II, Geometrías Lineales y Álgebra, respectivamente, todas ellas situadas en los cursos primero y segundo curso del Grado en Matemáticas.

El objeto del Trabajo Fin de Grado es aprender los elementos básicos de la teoría de los Diseños Combinatorios, a partir de la bibliografía recomendada, para aplicar posteriormente estos conceptos al desarrollo más amplio de alguna aplicación: cuadrados greco-latinos, geometrías finitas: planos proyectivos y planos afines, triples de Steiner, (entre otras muchas posibilidades) que se concretará para cada estudiante.

2. Problema Inverso de Autovalores

Profesor : Alberto Borobia

En Álgebra Lineal, dada una matriz cuadrada el problema de calcular todos o parte de sus autovalores se denomina Problema de Autovalores. Nosotros vamos a considerar el Problema de Autovalores desde el punto de vista opuesto, en el que la matriz será el punto de llegada y no el punto de partida. Para llegar a construir la matriz no partimos de cero sino que disponemos de cierta información sobre ella: conocemos sus autovalores y sabemos que cumple determinadas propiedades estructurales (como por ejemplo ser simétrica, o ser tridiagonal, o...). El problema por tanto consiste en determinar si realmente existe alguna matriz con esos autovalores y con esa estructura, y en caso de ser así construir dicha *matriz solución*. Este problema es el Problema Inverso de Autovalores (IEP, Inverse Eigenvalue Problem) y tiene importantes aplicaciones en Mecánica e Ingeniería.

El objeto de estudio del Trabajo Fin de Grado son algunos de los Problemas Inversos de Autovalores que corresponden a la Teoría de Completación. En estos problemas la restricción estructural impuesta a la matriz consiste en que se conocen algunas de las entradas de la matriz y se desconocen el resto de las entradas.

Para realizar el trabajo se empleará como material básico el artículo de recopilación titulado *Inverse Matrix Eigenvalue Problem* escrito por Ikramov y Chugunov, donde se describe con detalle y precisión distintos Problemas Inversos de Autovalores, a la vez que incluye algoritmos finitos que permiten construir las matrices solución. Se estudiaran únicamente los casos más sencillos y se pedirá ilustrar, para matrices de tamaño reducido, el cálculo de matrices solución con ejemplos concretos.

Los conocimientos matemáticos requeridos se han estudiado en las asignaturas de Álgebra Lineal I y II, Geometrías Lineales y Matemática Discreta. Todas pertenecientes a los primeros cursos del Grado en Matemáticas.

3. Representación de Grupos Finitos

Profesor : Javier Pérez

El objetivo de este Trabajo de Fin de Grado es introducir el concepto de representación de un grupo finito. Se hará especial énfasis en el concepto de irreducibilidad, así como en la decisiva teoría de caracteres como herramienta para la determinación de todas las representaciones irreducibles de un grupo dado. Se definirá a su vez la matriz de caracteres de caracteres y se calcularán las representaciones irreducibles de algunos grupos finitos notables.

Como referencias bibliográficas, se destacan:

J.P.Serre "Representaciones lineales de los grupos finitos" (Existe versión en español). Omega.

J.L.Alperin, R.B. Bell "Groups an representacións" GTM. 162. Springer.

Línea: Geometría y Topología

Los profesores encargados de dirigir dichos trabajos son (por orden alfabético):

Javier Cirre Torres
Antonio Félix Costa González
José Luis Estévez Balea
Víctor Fernández Laguna

1. Los temas sobre los que podrá versar el TFG son:
   a. *Poliedros y sus generalizaciones*. Estudio de los distintos tipos de poliedros tridimensionales (por ejemplo poliedros estrellados, semirregulares, etc) y sus generalizaciones a dimensiones superiores (por ejemplo politopos en dimensión cuatro).

b. *Geometrías no euclidianas*. Geometrías que no verifican el quinto postulado en la geometría de Euclides: por ejemplo, geometrías esférica e hiperbólica.
c. *Resultados avanzados en geometría proyectiva*. Estudio descriptivo y en coordenadas de objetos proyectivos bi- y tridimensionales.
d. *Teoremas globales en geometría diferencial de curvas y superficies*. Teoremas que expresan propiedades que no son únicamente locales, por ejemplo que hacen referencia a una superficie compacta en el espacio.
e. *Variedades diferenciales abstractas*. Generalización del concepto de subvariedad diferenciable del espacio euclidiano. Son objetos que en principio se estudian sin estar sumergidos en ningún espacio, hay problemas y resultados muy importantes para las variedades de dimensión baja.
f. *Teoría de nudos*. Un nudo es un encaje cualquiera de la circunferencia en el espacio, pero en general la imagen de tal circunferencia no bordea un disco, dando lugar a un nudo no trivial. La teoría matemática para estudiar este concepto es la teoría de nudos que tiene además aplicaciones fuera de las matemáticas.
g. *Topología algebraica.* Se estudian aplicaciones de la teoría de grupos, anillos y módulos al estudio de las propiedades de los espacios topológicos, y, en particular, al problema de la clasificación topológica de los espacios topológicos. Se definen invariantes algebraicos que permitan avanzar estadios en el conocimiento de esta clasificación.
h. *Teoría de la forma.* Se estudian propiedades de la forma o "shape" de espacios topológicos que estén relacionados con los sistemas dinámicos continuos.
i. *Topología general.* Se estudian propiedades más avanzadas de los espacios topológicos que aquellas que han sido estudiadas en las asignaturas de Topología del grado. Así, se puede hacer un estudio del Teorema de Tychonoff, de los espacios de funciones, etc.
j. *Los axiomas de la geometría.* En este trabajo se expondrán los axiomas que definen una geometría. Se expondrán en principio los *Axiomas de incidencia* dentro de los que se encuentra el conocido como 5º Axioma. Estos Axiomas de incidencia nos acercan a la idea de una estructura reticular formada por puntos, rectas y planos que son los objetos básicos de la geometría. Se presentarán ejemplos donde se comprobará la independencia de algunos de ellos. La cuestión de la independencia del 5º axioma se ha resuelto con la formalización de la geometría hiperbólica. Posteriormente se presentarán los *Axiomas de medida* y podemos habla de geometría vectorial y espacio afín. En este contexto aparecen algunos teoremas clásicos como los Teoremas de Thales, Ceva y Desargues. En este contexto podemos construir también la geometría proyectiva. La geometría afín es todavía un poco deficiente, por ejemplo no podemos comparara las longitudes de dos segmentos si estos no son paralelos. Por último, se introducen los *Axiomas de congruencia*, que junto con el producto escalar, nos llevan a la Geometría Euclídea. Llegados a este punto, y en función de la extensión del desarrollo del trabajo se puede poner como apéndice una breve introducción a la Geometría Hiperbólica de dimensión 2, como contestación a la controversia entorno al axioma de Euclides.
k. *La clasificación de las superficies.* En este trabajo se tratan variedades de dimensión 2 que pueden ser orientables o no, y eventualmente tener frontera. En primer lugar se tratan las superficies sin frontera (cerradas), y el trabajo consiste en demostrar el Teorema de Clasificación de las superficies cerradas. Concretamente este teorema clasifica las clases de homeomorfismos de superficies orientables como una suma conexa de g toros, y en el caso no

orientable como un asuma conexa de *k* planos proyectivos. La demostración del teorema se hace utilizando una representación plana de la superficie como un polígono con ciertas aristas identificadas. La operación de suma conexa se reflejará en una operación de identificación de aristas entre dos polígonos. Se estudia la triangulación de las superficies en el polígono que la representa, de esta triangulación se obtiene la Característica de Euler, que es un invariante topológico de la superficie. El caso de las superficies con borde se hace de manera análoga. La representación de la superficie como un polígono puede ser extremadamente útil para visualizar una estructura geométrica de una superficie si construimos el polígono en el espacio hiperbólico y además de esta representación se puede extraer una presentación del grupo fundamental de la superficie.

Línea: Aplicaciones de las Matemáticas

Profesor : Roberto Canogar

Teoría Matemática de la Información.

En este trabajo se pretende introducir al alumno en la teoría matemática de la información, utilizada actualmente en cualquier proceso de transmisión o almacenamiento de información, por ejemplo: los CD's, DVD's, los teléfonos móviles, internet, satélites, y un largo etcétera.

Se estudiará el artículo o trabajo [2] que fundamentó toda esta teoría y la revolución digital posterior. No es una exageración decir que vivimos en la edad de la información, y que este artículo ha sido trascendental en el desarrollo de esta revolución. Antes de empezar con el trabajo de Shannon hay que leer el artículo de divulgación [3], que muestra lo elegante y profunda que es esta teoría.

Conceptualmente uno de los grandes logros del trabajo de Shannon fué distinguir las 5 partes básicas de cualquier proceso comunicacativo:

1 la fuente de información, que produce un mensaje o mensajes;

2 el transmisor que transforma o codifica el mensaje y crea una se˜nal que puede ser enviada a través de un canal;

3 el canal, que es el medio por el que la se˜nal es enviada y puede estar sujeto a cierta cantidad de ruido;

4 el receptor, que transforma o decodifica la se˜nal en mensaje;

5 el destinatario (típicamente una persona o máquina), para el cual el mensaje estaba pensado.

Por otro lado, uno de los preceptos fundamentales de este artículo es que toda transmisión de información es en esencia binaria, de hecho Shannon fué el primero en utilizar la palabra BIT (Binary digIT). Dio una definición precisa de ratio de información producida por una fuente de información y le dio una magnitud: la entropía (bits por símbolo). También definió la capacidad de un canal de comunicación en bits por segundo, y entre los tipos de canales distinguió entre los discretos y los continuos. Finalmente, enunció y demostró los teoremas fundamentales de los canales discretos con y sin ruido, e hizo lo análogo para los canales continuos.

´

Área de conocimiento

La teoría de la información requiere conocimiento de la cálculo de probabilidades y estadística, lo que corresponde a cursos introductorios de grado. Poder hacer algún programa sencillo de análisis estadístico, aunque no es imprescindible, sí es recomendable. Una asignatura de procesos estocásticos complementa muy bien con este trabajo, aunque no sea necesario haberla cursado.

Objetivos del trabajo

Como primer objetivo, el alumno deberá entender con precisión y profundidad los teoremas fundamentales, y reflejarlo en la memoria. Para ello se pedirá una explicación muy detallada de la demostración de alguno de los teoremas y del significado de la entropía.

Como segundo objetivo, se hará el análisis de un esquema de comunicación concreto elegido por el alumno o por el tutor: midiendo la entropía, el ruido, la capacidad del canal, y describiendo la codificación y decodificación, etc.

Línea: Historia de las Matemáticas

Historia de las Matemáticas

Profesor: David Teira Serrano

Descripción del TFG:

El objetivo de este trabajo es redactar un trabajo con el formato de un artículo académico (unas 7.000 palabras) sobre un tema de Historia de las matemáticas. El trabajo debería presentar el problema, exponer las principales interpretaciones del mismo y, en la medida de lo posible, presentar alguna contribución original sobre el mismo.

Como requisitos previos, el alumno debe haber cursado la asignatura de Historia de las matemáticas, para familiarizarse con el tipo de trabajo intelectual que se realizará. Debe leer, al menos, inglés para poder manejar bibliografía actual sobre el tema escogido.

El alumno deberá acordar con el tutor a principio de curso el tema así como la estructura y la bibliografía del trabajo.

Bibliografía:

En cuanto a la bibliografía, el alumno deberá manejar fuentes originales (textos clásicos de Historia de la matemática), así como, al menos, tres monografías o una colección equivalente de artículos sobre las mismas fuentes. Pueden ponerse en contacto con el tutor por correo electrónico (dteira@fsof.uned.es) antes incluso de comenzar el curso para que le facilite referencias sobre el tema de su interés.

Línea: Investigación operativa

Profesor coordinador: Eduardo Ramos Méndez

Los estudiantes de que quieran realizar el **Trabajo Fin de Grado** en la línea de **Investigación Operativa** deberán haber cursado las asignaturas de ***Programación lineal y entera*** y ***Modelización*** de carácter básico y obligatorio respectivamente y la optativa de ***Teoría de juegos*** .

Los **Trabajos Fin de Grado** en la línea de **Investigación Operativa** podrán consistir en la resolución o el estudio de alguno de los aspectos siguientes:

1. Resolución de uno o varios problemas de Investigación Operativa relacionado con los Modelos de optimización o de Teoría de juegos.
2. El examen de algún modelo particular de optimización o de algún tipo de juego especial.
3. Análisis de algún artículo o capítulo de un libro del área correspondiente.

Los trabajos habrán de redactarse por escrito, con el esmero necesario para dar prueba de una adecuada comprensión de los desarrollos llevados a cabo.

Línea: Estadística

Profesor coordinador : Francisco Hernangómez Cristóbal

Los estudiantes que quieran realizar el **Trabajo Fin de Grado** en la línea de **Estadística** deberán haber cursado **al menos dos** de las siguientes asignaturas optativas: **Teoría de la Decisión, Modelos de Regresión, Teoría de Muestras o Análisis Multivariante**.

Los **Trabajos Fin de Grado** en la línea de **Estadística** podrán consistir en la resolución o el estudio de alguno de los aspectos siguientes:

1. Resolución de uno o varios problemas estadísticos de enjundia relacionados con alguna de las asignaturas**: Inferencia Estadística, Teoría de la Decisión, Modelos de Regresión, Teoría de Muestras o Análisis Multivariante**.
2. Análisis Estadístico detallado de un conjunto real de datos, incluyendo análisis de las suposiciones, ajuste del modelo y conclusiones.
3. Análisis de algún artículo o capítulo de un libro relacionado con las asignaturas citadas anteriormente.

Los trabajos habrán de presentarse por escrito, con el esmero y detalle necesarios para dar prueba de una adecuada comprensión de los desarrollos llevados a cabo.

Línea: Probabilidad

Profesor coordinador: Ricardo Vélez Ibarrola

Los estudiantes de que quieran realizar el **Trabajo Fin de Grado** en la línea de **Probabilidad** deberán haber cursado las asignaturas optativas ***Procesos Estocásticos*** y ***Modelos Estocásticos***. Los **Trabajos Fin de Grado** en la línea de **Probabilidad** podrán consistir en la resolución o el estudio de alguno de los aspectos siguientes:

1. Resolución de uno o varios problemas probabilísticos de enjundia relacionado con alguna de las asignaturas ***Cálculo de Probabilidades 1*, *Cálculo de Probabilidades 2*, *Procesos Estocásticos* o *Modelos estocásticos***.
2. El examen de algún contraejemplo de interés relativo a algún resultado de la teoría de la Probabilidad.
3. Análisis de algún artículo o capítulo de un libro del área correspondiente.

Los trabajos habrán de redactarse por escrito, con el esmero necesario para dar prueba de una adecuada comprensión de los desarrollos llevados a cabo.

Línea: Cálculo Numérico

Profesor: Carlos Moreno González

El estudio de las propiedades de las ecuaciones que constituyen los modelos matemáticos que aparecen en la Ingeniería y las Ciencias Sociales, suministra un mayor conocimiento cualitativo del fenómeno.

Hasta la segunda mitad del siglo XX, las posibilidades de calcular las soluciones de un sistema de ecuaciones que modelara razonablemente un fenómeno real complejo, eran muy escasas. De hecho, históricamente esta imposibilidad ha empujado al científico y al ingeniero a su simplificación hasta modelos, muchas veces excesivamente simples. El desarrollo de los medios de cálculo electrónico de las últimas décadas ha cambiado de un modo radical estas actitudes y ha impulsado la creación de nuevas técnicas matemáticas y la revalorización de algunas antiguas, cuya puesta en práctica hasta entonces no era posible. La influencia de estos desarrollos en el avance tecnológico actual ha sido considerable.

La simulación numérica de estos fenómenos permite optimizar los diseños y prever problemas potenciales que puedan producirse, sin los costes económicos que la experimentación real o a escala originan. Es importante comprender que en general no es posible resolver mediante métodos exactos estos sistemas de ecuaciones y es preciso recurrir a las técnicas numéricas. Incluso en los casos más elementales, en los que es posible encontrar la solución en términos de las funciones elementales o mediante un desarrollo en serie, la calidad numérica de estas soluciones no es necesariamente mejor que la que provee un método aproximado, ya que la evaluación de las funciones elementales o el truncamiento de una serie puede conducir a notables errores de precisión.

En el grado de Matemáticas de la UNED están presentes dos asignaturas que pueden ser situadas como materias de Cálculo Numérico:

- Análisis Numérico Matricial e Interpolación
- Resolución Numérica de Ecuaciones

Los trabajos que se asocien a esta materia consistirán esencialmente en la simulación numérica de modelos que se construyan mediante ecuaciones numéricas o diferenciales. El principal propósito es la aproximación del alumno a los problemas reales que se plantean en Ciencia y Tecnología. Se pretende desarrollar sus capacidades de resolver problemas, no solamente desde un punto de vista conceptual sino también desde un punto de vista práctico.

En particular, se plantearán dos grupos de problemas en los que los alumnos podrán desarrollar este trabajo de grado:

- Modelos Matemáticos en Finanzas. Se requiere que recorrido del alumno en el grado se haya orientado a Probabilidades e Investigación Operativa.
- Modelos Matemáticos en Ingeniería Civil. Se requiere que recorrido del alumno en el grado se haya orientado a Análisis Matemático.