

23-24

MÁSTER UNIVERSITARIO EN  
MATEMÁTICAS AVANZADAS

# GUÍA DE ESTUDIO PÚBLICA



## TEORÍA DE LA MEDIDA

CÓDIGO 21152256

Ambito: GUI - La autenticidad, validez e integridad de este documento puede ser verificada mediante el  
Código Seguro de Verificación (CSV) en la dirección <https://sede.uned.es/validar>



374FAA572C768C98ACDF56FF4AA6AA28

uned

# ÍNDICE

|                                                            |
|------------------------------------------------------------|
| PRESENTACIÓN Y CONTEXTUALIZACIÓN                           |
| REQUISITOS Y/O RECOMENDACIONES PARA CURSAR ESTA ASIGNATURA |
| EQUIPO DOCENTE                                             |
| HORARIO DE ATENCIÓN AL ESTUDIANTE                          |
| COMPETENCIAS QUE ADQUIERE EL ESTUDIANTE                    |
| RESULTADOS DE APRENDIZAJE                                  |
| CONTENIDOS                                                 |
| METODOLOGÍA                                                |
| SISTEMA DE EVALUACIÓN                                      |
| BIBLIOGRAFÍA BÁSICA                                        |
| BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA                                |
| RECURSOS DE APOYO Y WEBGRAFÍA                              |



|                           |                                               |
|---------------------------|-----------------------------------------------|
| Nombre de la asignatura   | TEORÍA DE LA MEDIDA                           |
| Código                    | 21152256                                      |
| Curso académico           | 2023/2024                                     |
| Título en que se imparte  | MÁSTER UNIVERSITARIO EN MATEMÁTICAS AVANZADAS |
| Tipo                      |                                               |
| Nº ETCS                   | 0                                             |
| Horas                     | 0.0                                           |
| Periodo                   | SEMESTRE                                      |
| Idiomas en que se imparte |                                               |

## PRESENTACIÓN Y CONTEXTUALIZACIÓN

La teoría de la medida enlaza con un antiquísimo problema histórico: el de medir longitudes, áreas y volúmenes. Se trata de introducir los conceptos abstractos detrás de esas ideas geométricas: las medidas y la integración de funciones contra ellas. Se trabajarán álgebras de conjuntos (objetos a medir), construcciones de medidas (como las medidas producto), medidas con signo, comparaciones entre medidas, descomposiciones y derivadas, funciones medibles e integrables, espacios de funciones medibles, medidas como funcionales, y para finalizar, la existencia de medidas invariantes en una gran cantidad de grupos topológicos (medidas de Haar), y una introducción a las transformaciones que preservan medida y ergodicidad.

## REQUISITOS Y/O RECOMENDACIONES PARA CURSAR ESTA ASIGNATURA

En general, conocimientos correspondientes al anterior primer ciclo de la licenciatura, o al Grado actual de la UNED (especialmente las asignaturas optativas de Espacios Normados, de 4º, y de Integral de Lebesgue, también de 4º).

## EQUIPO DOCENTE

|                    |                                                     |
|--------------------|-----------------------------------------------------|
| Nombre y Apellidos | CARLOS ESCUDERO LIEBANA (Coordinador de asignatura) |
| Correo Electrónico | cescudero@mat.uned.es                               |
| Teléfono           | 91398-7238                                          |
| Facultad           | FACULTAD DE CIENCIAS                                |
| Departamento       | MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES                           |

## HORARIO DE ATENCIÓN AL ESTUDIANTE

Se llevará principalmente por la virtualización de la asignatura. El equipo docente y los tutores intercampus (si los hay) atenderán las consultas generales y de contenidos a través de los distintos foros del curso virtual.

Extraordinariamente también se puede utilizar el teléfono: 913987238 o el correo electrónico: cescudero@mat.uned.es. El horario de atención es: martes lectivos de 10:00 a 14:00 horas.

Ámbito: GUI - La autenticidad, validez e integridad de este documento puede ser verificada mediante el "Código Seguro de Verificación (CSV)" en la dirección <https://sede.uned.es/valida/374FAA572C768C98ACDF56FF4A46AA28>



## COMPETENCIAS QUE ADQUIERE EL ESTUDIANTE

### COMPETENCIAS BÁSICAS

CB6 - Poseer y comprender conocimientos que aporten una base u oportunidad de ser originales en el desarrollo y/o aplicación de ideas, a menudo en un contexto de investigación

CB7 - Que los estudiantes sepan aplicar los conocimientos adquiridos y su capacidad de resolución de problemas en entornos nuevos o poco conocidos dentro de contextos más amplios (o multidisciplinares) relacionados con su área de estudio

CB8 - Que los estudiantes sean capaces de integrar conocimientos y enfrentarse a la complejidad de formular juicios a partir de una información que, siendo incompleta o limitada, incluya reflexiones sobre las responsabilidades sociales y éticas vinculadas a la aplicación de sus conocimientos y juicios

CB9 - Que los estudiantes sepan comunicar sus conclusiones y los conocimientos y razones últimas que las sustentan a públicos especializados y no especializados de un modo claro y sin ambigüedades

CB10 - Que los estudiantes posean las habilidades de aprendizaje que les permitan continuar estudiando de un modo que habrá de ser en gran medida autodirigido o autónomo.

### COMPETENCIAS GENERALES

CG1 - Adquirir conocimientos generales avanzados en tres de las principales áreas de las matemáticas.

CG2 - Conocer algunas de las líneas de investigación dentro de las áreas cubiertas por el Máster.

CG4 - Aprender a redactar resultados matemáticos.

### COMPETENCIAS ESPECÍFICAS

CE1 - Saber abstraer las propiedades estructurales de los objetos matemáticos, distinguiéndolas de aquellas puramente ocasionales. Ser capaz de utilizar un objeto matemático en diferentes contextos.

CE2 - Conocer los problemas centrales, la relación entre ellos, las técnicas más adecuadas en los distintos campos de estudio, y las demostraciones rigurosas de los resultados relevantes.

CE4 - Saber analizar y construir demostraciones matemáticas, así como transmitir conocimientos matemáticos avanzados en entornos especializados.

## RESULTADOS DE APRENDIZAJE

El objetivo principal que se pretende es facilitar el acceso a herramientas relacionadas con la medida e integración, que resultan esenciales en el estudio de diversas ramas del Análisis Matemático tales como el Análisis Funcional, las Ecuaciones Diferenciales, el Análisis de Fourier y la Teoría de la Probabilidad. Se procurará proporcionar así mismo una serie de destrezas relacionadas con el cálculo práctico para los espacios de medida más habituales y para funciones concretas, y también para saber aplicar teoremas fundamentales de convergencia y otros. Finalmente, se intentará trasladar hábitos, métodos e ideas útiles para una futura actividad investigadora.

### Conocimientos.



- Conocer y comprender ciertas clases de conjuntos (anillos, álgebras, -anillos, -álgebras, clases monótonas, etc.), y sus propiedades.
- Conocer bien las medidas aditiva, completamente aditiva (o -aditiva), y exterior.
- Conocer las funciones medibles e integrables, y sus propiedades.
- Conocer los teoremas de convergencia, en relación con la integración; incluido el teorema de convergencia dominada de Lebesgue.
- Entender y saber demostrar los teoremas de Fubini y de Hobson-Tonelli.
- Conocer la compleción de una medida y, en particular, de un producto de medidas.
- Conocer las medidas con signo y sus propiedades. Interpretar las integrales como medidas con signo.
- Conocer la derivación de medidas de Radon, para dimensión finita, y la derivación de integrales.
- Conocer los principales conceptos relacionados con la derivación en la recta real.

**Destrezas y habilidades.**

- Saber dar diferentes ejemplos de clases fundamentales de conjuntos.
- Poder demostrar con detalle el teorema de extensión de Hahn, y los resultados principales sobre extensiones de medidas.
- Saber aplicar la medida de Lebesgue-Stieltjes en  $\mathbf{R}$ , y sus propiedades.
- Saber demostrar los Teoremas de Egoroff y de Lusin.
- Manejar con soltura distintos tipos de integrales.
- Familiarizarse con los productos de espacios medibles y de espacios de medidas; y con los productos tensoriales de medidas.
- Saber demostrar los teoremas de Hahn y de Jordan, y el teorema de recubrimiento de Vitali.
- Manejar los espacios normales, completamente regulares, y localmente compactos.

**Competencias.**

- Poder construir con detalle la medida de Lebesgue.
- Utilizar, en distintas situaciones, las medidas de Radon, y los teoremas de Lusin y de representación de Riesz, y sus respectivas demostraciones.
- Relacionar conceptos topológicos con las medidas de Borel regulares, las medidas de Baire, y sus aplicaciones.
- Poder desarrollar y aplicar los principales resultados relativos a los espacios de Lebesgue.

Ámbito: GUI - La autenticidad, validez e integridad de este documento puede ser verificada mediante el "Código Seguro de Verificación (CSV)" en la dirección <https://sede.uned.es/valida/>



374FAA572C768C98ACDF56FF4AA6AA28

## CONTENIDOS

### MEDIDAS, CONJUNTOS MEDIBLES, FUNCIONES MEDIBLES E INTEGRABLES

- Medidas y conjuntos medibles.
- Funciones medibles.
- Integración de funciones no negativas.
- Integración de funciones arbitrarias.
- La derivada de Radon-Nikodym.
- Introducción a los espacios  $L_p$ .
- El Teorema de Riesz de representación de los duales de  $L_p$  con  $1 \leq p < \infty$ .

### CONSTRUCCIONES DE MEDIDAS

- Medida exterior y medida de Carathéodory.
- Construcción de medidas exteriores.
- El Teorema de Carathéodory-Hahn: la extensión de una premedida a una medida.
- Construcciones de medidas particulares:
- Medidas producto: Los Teoremas de Fubini y Tonelli.
- Medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$ .
- Funciones de distribución acumulativas y medidas de Borel en  $\mathbb{R}$ .

### MEDIDA Y TOPOLOGÍA

- Medidas con signo. Descomposiciones de Hahn y de Jordan.
- Medidas de Radon.
- El Teorema de Riesz-Markov.
- El Teorema de Riesz.

### MEDIDAS EN GRUPOS TOPOLÓGICOS

- Grupos Topológicos.
- El Teorema de Kakutani del punto fijo.
- Medidas de Borel invariantes en grupos compactos.
- Transformaciones que preservan la medida y ergodicidad.



## METODOLOGÍA

El sistema fundamental de aprendizaje es el estudio del texto básico. Las preguntas sobre el mismo se realizarán en los foros de la asignatura, siguiendo la metodología usual de enseñanza a distancia de la UNED.

## SISTEMA DE EVALUACIÓN

### TIPO DE PRUEBA PRESENCIAL

|                                 |                      |
|---------------------------------|----------------------|
| Tipo de examen                  | Examen de desarrollo |
| Preguntas desarrollo            | 3                    |
| Duración del examen             | 120 (minutos)        |
| Material permitido en el examen |                      |

Ningún material

### Criterios de evaluación

El examen constará de 3 ejercicios que podrán ser de tipo práctico (resolución de problemas y aplicaciones de la teoría) o teórico (cuestiones o demostraciones de resultados teóricos, o preguntas directamente relacionados con ellos).

**El examen se puntuará sobre 10 puntos.**

|                                                                  |    |
|------------------------------------------------------------------|----|
| % del examen sobre la nota final                                 | 60 |
| Nota del examen para aprobar sin PEC                             | 5  |
| Nota máxima que aporta el examen a la calificación final sin PEC | 10 |
| Nota mínima en el examen para sumar la PEC                       | 5  |
| Comentarios y observaciones                                      |    |

### CARACTERÍSTICAS DE LA PRUEBA PRESENCIAL Y/O LOS TRABAJOS

|                         |    |
|-------------------------|----|
| Requiere Presencialidad | No |
| Descripción             |    |

La evaluación de esta asignatura se hará a través de 2 trabajos y el examen presencial.

Los dos trabajos serán:

El primero será la resolución de unos ejercicios, tanto teóricos como prácticos (i.e. ejemplos). Los ejercicios serán sobre propiedades elementales de medidas y funciones medibles e integrables, y sobre espacios  $L_p$ . Se deberá de entregar al final del primer tercio o la mitad del curso (aproximadamente).

El segundo trabajo será desarrollar uno de los temas introducidos en el curso (por ejemplo la medida de Haar). Se deberá de entregar casi al final del curso.

### Criterios de evaluación

Para el primer trabajo, se valorará principalmente la corrección y la calidad de los argumentos utilizados en cada ejercicio.

Para el segundo ejercicio se valorará principalmente la calidad de la argumentación y redacción del tema propuesto.

Ámbito: GUI - La autenticidad, validez e integridad de este documento puede ser verificada mediante el "Código Seguro de Verificación (CSV)" en la dirección <https://sede.uned.es/valida/>



374FAA572C768C98ACDF56FF4AA6AA28

Ponderación de la prueba presencial y/o los trabajos en la nota final

Fecha aproximada de entrega

Comentarios y observaciones

Cada trabajo se puntuará sobre 5 puntos y cada trabajo suma un 20% de la nota final.

1º: final de noviembre; 2º: enero

### PRUEBAS DE EVALUACIÓN CONTINUA (PEC)

¿Hay PEC?

No

Descripción

Criterios de evaluación

Ponderación de la PEC en la nota final

Fecha aproximada de entrega

Comentarios y observaciones

### OTRAS ACTIVIDADES EVALUABLES

¿Hay otra/s actividad/es evaluable/s?

No

Descripción

Criterios de evaluación

Ponderación en la nota final

Fecha aproximada de entrega

Comentarios y observaciones

### ¿CÓMO SE OBTIENE LA NOTA FINAL?

Sea

EX:= nota del examen presencial (sobre 10 puntos)

T:= suma de la nota del primer trabajo y el segundo trabajo (sobre 10 puntos)

NF:=nota final (sobre 10 puntos)

**Hay varios casos:**

Si EX es mayor o igual a 4, entonces  $NF = \max ( EX, (3/5)EX + (2/5)T )$

Si EX es menor a 4, entonces  $NF=EX$

## BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

ISBN(13):9780134689494

Título:REAL ANALYSIS (4ª)

Autor/es:P. M. Fitzpatrick ; H. L. Royden ;

Editorial:PEARSON

Los alumnos deben disponer del texto base, sobre el que pueden formular preguntas.

Existen otras ediciones del libro de texto *Real Analysis*. Aunque se seguirá la 4ª edición, la 3ª edición también es recomendable.

Ámbito: GUI - La autenticidad, validez e integridad de este documento puede ser verificada mediante el "Código Seguro de Verificación (CSV)" en la dirección <https://sede.uned.es/validar>



374FAA572C768C98ACDF56FF4AA6AA28



## BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

ISBN(13):9780070619876

Título:REAL AND COMPLEX ANALYSIS (3ª)

Autor/es:W.Rudin ;

Editorial:MHHE

ISBN(13):9780691113869

Título:REAL ANALYSIS MEASURE THEORY, INTEGRATION, AND HILBERT SPACES (1ª)

Autor/es:Rami Shakarchi ; Elias M. Stein ;

Editorial:PRINCETON UNIVERSITY PRESS

ISBN(13):9781468494426

Título:MEASURE THEORY

Autor/es:P. Halmos ;

Editorial:SPRINGER-VERLAG

ISBN(13):9788420506319

Título:INTEGRACIÓN : TEORÍA Y TÉCNICAS

Autor/es:Rubio, Baldomero ; Miguel De Guzman ;

Editorial:Alhambra

ISBN(13):9788436223323

Título:ANÁLISIS MATEMÁTICO V ([1ª ed., 1ª reimp.])

Autor/es:Valdivia Ureña, Manuel ;

Editorial:Universidad Nacional de Educación a Distancia

## RECURSOS DE APOYO Y WEBGRAFÍA

El curso virtual, y la atención en foros, correo electrónico y teléfono.

## IGUALDAD DE GÉNERO

En coherencia con el valor asumido de la igualdad de género, todas las denominaciones que en esta Guía hacen referencia a órganos de gobierno unipersonales, de representación, o miembros de la comunidad universitaria y se efectúan en género masculino, cuando no se hayan sustituido por

Ámbito: GUI - La autenticidad, validez e integridad de este documento puede ser verificada mediante el "Código Seguro de Verificación (CSV)" en la dirección <https://sede.uned.es/valida/374FAA572C768C98ACDF56FF4AA6AA28>



términos genéricos, se entenderán hechas indistintamente en género femenino o masculino, según el sexo del titular que los desempeñe.

Ámbito: GUI - La autenticidad, validez e integridad de este documento puede ser verificada mediante el "Código Seguro de Verificación (CSV)" en la dirección <https://sede.uned.es/valida/>



374FAA572C768C98ACDF56FF4AA6AA28