24-25

GRADO EN MATEMÁTICAS
TERCER CURSO

GUÍA DE ESTUDIO PÚBLICA

INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIOS DE HILBERT

CÓDIGO 61023044

Ámbito: GUI - La autenticidad, validez e integridad de este documento puede ser verificada mediante el "Código Seguro de Verificación (CSV)" en la dirección https://sede.uned.es/valida/
A197BC6115D919DE4AA9BF16C2912CFA

24-25

INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIOS DE HILBERT

CÓDIGO 61023044

ÍNDICE

Ámbito: GUI - La autenticidad, validez e integridad de este documento puede ser verificada mediante el "Código Seguro de Verificación (CSV)" en la dirección https://sede.uned.es/valida/
A197BC6115D919DE4AA9BF16C2912CFA

NOMBRE DE LA ASIGNATURA	INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIOS DE HILBERT
CÓDIGO	61023044
CURSO ACADÉMICO	2024/2025
DEPARTAMENTO	MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES
TÍTULO EN QUE SE IMPARTE	GRADO EN MATEMÁTICAS
CURSO	TERCER CURSO
PERIODO	SEMESTRE 1
Nº ETCS	6
HORAS	150.0
IDIOMAS EN QUE SE IMPARTE	CASTELLANO

PRESENTACIÓN Y CONTEXTUALIZACIÓN

La teoría de los espacios de Hilbert puede considerarse como una continuación natural de la teoría de los espacios euclídeos: un espacio de Hilbert es un espacio normado completo cuya norma procede de un producto interno. El producto interno permite introducir conceptos como ángulo, ortogonalidad o proyección ortogonal; la completitud permite introducir el concepto de base ortonormal. Todos estos conceptos de espacios euclídeos ascienden a espacios vectoriales de dimensión infinita tales como algunos espacios vectoriales de sucesiones de números complejos o de funciones. Son estos espacios infinito dimensionales los que confieren una gran utilidad a la teoría de los espacios de Hilbert por sus múltiples aplicaciones.

Introducción a los Espacios de Hilbert es una asignatura que en el plan de estudios de la titulación figura en el primer cuatrimestre del tercer curso. Tiene carácter obligatorio y se le asignan 6 ECTs. La asignatura forma parte del área de conocimiento del Ánalisis Matemático.

La estructura operativa de los espacios de Hilbert es una herramienta fundamental en campos de las matemática, física e ingeniería como las ecuaciones en derivadas parciales, la mecánica cuántica, la teoría de la señal, la teoría de los procesos estocásticos de cuadrado integrable, la modelización de los mercados financieros, etc.

La teoría de los espacios de Hilbert constituye el núcleo a partir del cual se desarrolló el análisis funcional. Los conceptos subyacentes en los espacios de Hilbert son los conceptos de espacio vectorial y de producto interno. El producto interno define una norma aunque no toda norma proviene de un producto interno. En consecuencia, esta asignatura extiende por una lado el estudio de los espacios euclídeos y por otro lado tendrá una extensión a los espacios normados en una asignatura posterior.

La asignatura es la continuación natural de las asignaturas de "Funciones de varias variables I y II" y es recomendable haberla cursado antes de matricualrse en la asignatura de "Análisis de Fourier y ecuaciones en derivadas parciales".

Ámbito: GUI - La autenticidad, validez e integridad de este documento puede ser verificada mediante el "Código Seguro de Verificación (CSV)" en la dirección https://sede.uned.es/valida/
A197BC6115D919DE4AA9BF16C2912CFA

La asignatura constituye el pilar fundamntal de la formación para aquellos alumnos que enfoquen su carrera profesional a la investigación matemática en el área del Análisis Matemático.

REQUISITOS Y/O RECOMENDACIONES PARA CURSAR LA ASIGNATURA

Los conocimientos previos necesarios son esencialmente básicos y quedan perfectamente cubiertos con los contenidos de las siguientes asignaturas:
Funciones de una variable (I y II), Funciones de varias variables (I y II), Álgebra lineal (I y II).
Se requiere a su vez manejar con soltura los cálculos con números complejos. p.e, lo que se estudia en la asignatura *Lenguaje matemático, conjuntos y números*. Ocasionalmente, en algunos ejemplos, se utiliza algún resultado de la asignatura *Variable Compleja* aunque no se desarrolla ningún método de análisis complejo.

Recomendaciones generales: Al final de cada capítulo del texto base aparecen ejercicios propuestos de los que recomendamos que al menos se hagan de ocho a diez cada semana. Es muy importante que se intenten hacer insistentemente antes de consultar las soluciones propuestas en el apartado final del libro.

EQUIPO DOCENTE

Nombre y Apellidos	JOSE IGNACIO TELLO DEL CASTILLO (Coordinador de asignatura)
Correo Electrónico	jtello@mat.uned.es
Teléfono	91398-7350
Facultad	FACULTAD DE CIENCIAS
Departamento	MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES

Nombre y Apellidos	TOMMASO LEONORI
Correo Electrónico	tommaso.leonori@mat.uned.es
Teléfono	
Facultad	FACULTAD DE CIENCIAS
Departamento	MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES

HORARIO DE ATENCIÓN AL ESTUDIANTE

El equipo docente realizará la tutorización fundamentalmente a través del Curso Virtual. El Seguimiento del Aprendizaje se realizará mediante el curso virtual y los foros abiertos para ese fin. En él se habilitarán foros temáticos en los que el alumno podrá plantear sus dudas y trabajar junto con sus compañeros.

Tutorización presencial en la Sede Central en los siguientes horarios:
Martes de 10:00 a 14:00 horas.

Ámbito: GUI - La autenticidad, validez e integridad de este documento puede ser verificada mediante el "Código Seguro de Verificación (CSV)" en la dirección https://sede.uned.es/valida/
A197BC6115D919DE4AA9BF16C2912CFA

Despacho: 2.95
Facultad de Psicología, C/ Juan del Rosal 10
Tutorización telefónica en los horarios de atención presencial en el teléfono 91 398 7350
Tutorización postal. En la dirección:
J.Ignacio Tello
Departamento de Matemáticas Fundamentales. Fcultad de Ciencias
Edificio de Psicología. C/ Juan del Rosal 10
28040-Madrid

TUTORIZACIÓN EN CENTROS ASOCIADOS

En el enlace que aparece a continuación se muestran los centros asociados y extensiones en las que se imparten tutorías de la asignatura. Estas pueden ser:

•**Tutorías de centro o presenciales**: se puede asistir físicamente en un aula o despacho del centro asociado.

•**Tutorías campus/intercampus**: se puede acceder vía internet.

Consultar horarios de tutorización de la asignatura 61023044

COMPETENCIAS QUE ADQUIERE EL ESTUDIANTE

COMPETENCIAS GENERALES

CG4- Análisis y Síntesis

CG5- Aplicación de los conocimientos a la práctica

CG6- Razonamiento crítico

CG8- Seguimiento, monitorización y evaluación del trabajo propio o de otros

CG10- Comunicación y expresión escrita

CG13- Comunicación y expresión matemática, científica y tecnológica

COMPETENCIAS ESPECíFICAS

CED1- Comprensión de los conceptos básicos y familiaridad con los elementos fundamentales para el estudio de las Matemáticas superiores

CED2- Destreza en el razonamiento cuantitativo, basado en los conocimientos adquiridos

CEA4- Habilidad para detectar inconsistencias de razonamiento ya sea de forma teórica o práctica mediante la búsqueda de contraejemplos

Ámbito: GUI - La autenticidad, validez e integridad de este documento puede ser verificada mediante el "Código Seguro de Verificación (CSV)" en la dirección https://sede.uned.es/valida/
A197BC6115D919DE4AA9BF16C2912CFA

CEA7- Habilidad para presentar el razonamiento matemático y sus conclusiones de manera clara y precisa, de forma apropiada a la audiencia a la que se dirige, tanto en la forma oral como escrita

CEA8- Capacidad de relacionar distintas áreas de las matemáticas

CE1- Razonamiento crítico, capacidad de evaluar trabajos propios y ajenos

CEP4- Resolución de problemas

RESULTADOS DE APRENDIZAJE

Los resultados específicos de la asignatura son:
Conocer las estructuras básicas en los espacios de Hilbert reales y complejos. Estudiar la herramienta básica: Ortogonalidad. Manejar los conceptos de proyección y sus aplicaciones.
·Estudiar las desigualdades de Schwarz, de Bessel, y la fórmula del paralelogramo.
·Manejar los conceptos de desarrollo en bases ortonormales, el método de ortogonalización de Gram-Schmidt y las propiedades mas importantes de los espacios de Hilbert.
·Saber calcular series de Fourier de ciertas funciones. Aplicaciones a la Física. Conocer y ser capaz de estudiar la convergencia puntual y uniforme de las series de Fourier.
·Familiarizarse con las propiedades básicas de los espacios l^2 y L^2.
·Utilizar la Dualidad en los espacios de Hilbert. Teoremas de caracterización de las formas lineales continuas en un espacio de Hilbert. Conocer la estructura operativa de los espacios de Hilbert como herramienta indispensable en campos de las matemáticas, física e ingeniería como las ecuaciones en derivadas parciales, la mecánica cuántica y la teoría de la señal.
·Familiarizarse con las clases de conjuntos clásicas en la teoría de la medida, anillos, sigma-anillos, álgebras y sigma algebras.
·Entender los conceptos de medida exterior y medida sobre clases de conjuntos.
·Conocer el método de obtención de la medida de Lebesgue, entenderlo como una extensión del concepto de área y volumen.
·Diferenciar entre la integral de Lebesgue y la de Riemann.

CONTENIDOS

1. Introducción

1.1 Introducción

1.2 Lema de Zorn

Ámbito: GUI - La autenticidad, validez e integridad de este documento puede ser verificada mediante el "Código Seguro de Verificación (CSV)" en la dirección https://sede.uned.es/valida/
A197BC6115D919DE4AA9BF16C2912CFA

1.3 Aplicaciones lineales (opcional)

1.4 Topología en R^N (opcional)

1.5 Desigualdades en R^N

1.6 Ejercicios

2. Espacios topológicos

2.1 Introducción

2.2 Espacio topológico: Definición

2.3 Espacio Métrico

2.4 Funciones continuas.

2.5 Conjuntos compactos

2.6 Teorema de Baire

2.7 Ejercicios

3. Integral de Lebesgue

3.1 Introducción

3.2 Espacio medible

3.3 Medida. Espacio de medida

3.4 Medida de Lebesgue en R^N

3.5 Función medible

3.6 Teorema de la convergencia monótona y de la convergencia dominada

3.7 Ejercicios

4. Espacios de Banach

4.1 Introducción

4.2 Espacios normados

4.3 Espacios de Banach

4.4 Bases en un espacio de Banach

4.5 Teorema de Hanh Banach

4.6 Espacios de Banach separables

4.7 Funciones continuas entre espacios de Banach

4.8 Espacio Dual de un espacio de Banach

4.9 Ejercicios

Ámbito: GUI - La autenticidad, validez e integridad de este documento puede ser verificada mediante el "Código Seguro de Verificación (CSV)" en la dirección https://sede.uned.es/valida/
A197BC6115D919DE4AA9BF16C2912CFA

5. El espacio de las funciones continuas

5.1 Introducción
5.2 El espacio de las funciones continuas
5.3 El espacio de las funciones continuas es un espacio de Banach
5.4 Equicontinuidad
5.5 Teorema de Ascoli-Arzela
5.6 Teorema de Stone-Weirstrass. Bases de Schauder en C() y separabilidad.
5.7 Ejercicios

6. Espacios de Lebesque

6.1 Introducción
6.2 Definición de espacios L^p
6.3 Desigualdad de Holder en L^p
6.4 L^p es un espacio de Banach
6.5 L^p es un espacio separable para p menor que infinito
6.6 Espacio dual de L^p
6.7 Convergencia en L^1 y convergencia puntual (Opcional)
6.8 Ejercicios

7. Espacios de Hilbert

7.1 Introducción
7.2 Producto interno
7.3 Espacios de Hilbert: Definición
7.4 Ortogonalidad
7.5 Conjuntos cerrados en espacios de Hilbert
7.6 Bases en un espacio de Hilbert
7.7 Convergencia débil. La sección de ejercicios cambia la numeración
7.8 Ejercicios

8. Optimización

8.1 Introduccio¿n
8.2 Conjuntos convexos.
8.3 Teorema de la mejor aproximacio¿n
8.4 Teorema de la proyecio¿n.
8.5 Ejercicios

Ámbito: GUI - La autenticidad, validez e integridad de este documento puede ser verificada mediante el "Código Seguro de Verificación (CSV)" en la dirección https://sede.uned.es/valida/
A197BC6115D919DE4AA9BF16C2912CFA

9. Operadores lineales

9.1 Introducción
9.2 Operadores lineales y continuos
9.3 Teorema de representacióND e Riesz
9.4 Operador adjunto. Operadores autoadjuntos
9.5 Autovalores y autofunciones
9.6 Ejercicios

10. Operadores compactos

10.1 Introducción
10.2 Operadores compactos
10.3 Autovalores de operadores compactos
10.4 Bases de autofunciones de operadores compactos
10.5 Ejercicios

11. Series trigonométricas

11.1 Introducción
11.2 Definición y propiedades
11.3 Desigualdad de Bessel
11.4 Identidad de Parseval
11.5 Lema de Riemann-Lebesgue
11.6 Series trigonométricas
11.7 Ejercicios

12. Transformada de Fourier

12.1 Introducción
12.2 Definición y propiedades
12.3 La transformada de Fourier N-diimensional
12.4 Ejercicios

METODOLOGÍA

El plan de trabajo se referirá al texto base *Introducción al análisis funcional de J.Ignacio Tello*. En él se fijan tanto los contenidos del estudio como la notación, que puede cambiar en los distintos libros que tratan de la materia. En el Plan de Trabajo, se darán orientaciones concretas para el estudio de los temas, se insistirá en el tipo de ejercicios sobre los que el alumno de-berá trabajar, y se indicará un cronograma temporal sobre la distribución de

Ámbito: GUI - La autenticidad, validez e integridad de este documento puede ser verificada mediante el "Código Seguro de Verificación (CSV)" en la dirección https://sede.uned.es/valida/
A197BC6115D919DE4AA9BF16C2912CFA

contenidos.
Gran parte de la formación recae sobre el trabajo personal del alumno con la bibliografía recomendada, básica y complementaria, siempre con la ayuda del profesor de la Sede Central de la UNED, los tutores y las tecnologías de ayuda de la UNED.
Los contactos con el equipo docente pueden ser: en el curso virtual, por email, correo postal, por teléfono o presenciales en la sede central, estos dos últimos en el horario que apaerece en "Horario de atención al estudiante".
En el foro de consultas generales se plantearán cues-tiones de caracter burocrático, de gestión o de procedimientos de evalua-ción, dejando las dudas especificas de la materia para los foros de cada tema, dondo los alumnos podrán realizar consultas razonadas y concisas sobre el tema.
En el foro de alumnos se podrán comunicar con los otros alumnos, no es un foro tutelado por lo que los profesores no se responsabilizarán del contenido del mismo.

SISTEMA DE EVALUACIÓN

TIPO DE PRUEBA PRESENCIAL

Tipo de examen	Examen de desarrollo
Preguntas desarrollo	
Duración del examen	120 (minutos)
Material permitido en el examen	

Ninguno

Criterios de evaluación

La prueba consistirá en un examen escrito con varios problemas teóricos o prácticos, que podrán tener diversos apartados, y que no superarán en dificultad a los del Texto base.

Se evaluarán los siguientes aspectos:

Comprensión de los aspectos básicos
Resolución de problemas en los que se demuestren las habilidades adquiridas.
Formulación correcta en lenguaje matemático (claridad y precisión).
Desarrollo de argumentos lógicos con clara identificación de las hipótesis y las conclusiones.

De manera general conviene recordar que todas las soluciones de los ejercicios de la Prueba Presencial deberán estar suficientemente justificadas. También se tendrá en cuenta la presentación de los ejercicios de la Prueba Presencial.

La notación utilizada en las Pruebas Presenciales será la del texto base, existiendo la obligación de conocerla.

% del examen sobre la nota final	90
Nota del examen para aprobar sin PEC	5
Nota máxima que aporta el examen a la calificación final sin PEC	10
Nota mínima en el examen para sumar la PEC	4
Comentarios y observaciones	

Ámbito: GUI - La autenticidad, validez e integridad de este documento puede ser verificada mediante el "Código Seguro de Verificación (CSV)" en la dirección https://sede.uned.es/valida/
A197BC6115D919DE4AA9BF16C2912CFA

La prueba de evaluación continua únicamente se tendrá en cuenta para los alumnos en alguna de las dos situaciones siguientes:

- Alumnos que hayan obtenido un 10 en la prueba presenciall. La P.E.C. se valorará para obtener la matricula de honor en la calificación final. No es imprescindible haber realizado la PEC para obtener la matrícula de honor, pero en caso de haber un número alto de posibles M.H. tendrán preferencia aquellos alumnos que hayan obtenido un 10 en la PEC.

- Alumnos que han obtenido una calificación igual o superior a 4 e inferior a 5 en el examen final. En este caso, la calificación finál será el mínimo de 5 y la suma de la calificación del examen final y la de la evaluación continua (valorada entre 0 y 1), es decir
Si la NotaExamenFinal >=5; entonces NotaFinal= NotaEExamenFinal
Si la NotaExamenFinal <5 y NotaExamenFinal >=4; entonces Nota Final = min(5, NotaExamenFinal+ NotaPEC)
Si la NotaExamenFinal <4; entonces NotaFinal= NotaEExamenFinal
Los contenidos que entran en la PEC son los correspondientea a los 7 primeros temas.
La PEC se valorará tanto en la convocatoria de Febrero como en la de septiembre.

PRUEBAS DE EVALUACIÓN CONTINUA (PEC)

¿Hay PEC? Si

Descripción

La prueba de evaluación continua será opcional para los alumnos. Se realizará mediante:
Cuestionario en línea, accesible a través de la plataforma virtual de la UNED. La prueba se realizará entre el día 1 y el 22 de diciembre.

Criterios de evaluación

El cuestionario consiste en varias preguntas de desarrollo y / o tipo test.

Ponderación de la PEC en la nota final máximo del 10%

Fecha aproximada de entrega Entre el 1 y el 22 de diciembre

Comentarios y observaciones

En caso de que el alumno decida no realizar el cuestionario de evaluación continua la nota final será la de la Prueba Presencial.

OTRAS ACTIVIDADES EVALUABLES

¿Hay otra/s actividad/es evaluable/s? No

Descripción

Criterios de evaluación

Ponderación en la nota final

Fecha aproximada de entrega

Ámbito: GUI - La autenticidad, validez e integridad de este documento puede ser verificada mediante el "Código Seguro de Verificación (CSV)" en la dirección https://sede.uned.es/valida/
A197BC6115D919DE4AA9BF16C2912CFA

Comentarios y observaciones

¿CÓMO SE OBTIENE LA NOTA FINAL?

La prueba de evaluación continua únicamente se tendrá en cuenta para los alumnos en alguna de las dos situaciones siguientes:

- Alumnos que hayan obtenido un 10 en el examen final. La P.E.C. se valorará para obtener la matricula de honor en la calificación final.

- Alumnos que han obtenido una calificación igual o superior a 4 e inferior a 5 en el examen final. En este caso, la calificación finál será el mínimo de 5 y la suma de la calificación del examen final y la de la evaluación continua (valorada entre 0 y 1), es decir
Si la NotaExamenFinal >=5; entonces   NotaFinal= NotaEExamenFinal
Si la NotaExamenFinal <5 y NotaExamenFinal >= 4; entonces Nota Final = min(5, NotaExamenFinal+ NotaPEC)
Si la NotaExamenFinal <4; entonces   NotaFinal= NotaEExamenFinal

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

ISBN(13):9788419947406
Título:INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS FUNCIONALPrimera edición
Autor/es:José Ignacio Tello Del Castillo ;
Editorial:EDITORIAL SANZ Y TORRES

Los contenidos del texto coinciden con los contenidos de la asignatura. Aquellos temas que aparecen en la guía docente como "opcionales" también aparecen en el libro.

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

ISBN(13):9780521337175
Título:AN INTRODUCTION TO HILBERT SPACECambridge, 1988
Autor/es:N. Young ;
Editorial:CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS..

ISBN(13):9780821819128
Título:AN INTRODUCTION TO HILBERT SPACE2ª edición (1999)
Autor/es:S. K. Berberian ;
Editorial:AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY

ISBN(13):9781461272113
Título:FOURIER ANALYSIS AND APPLICATIONS1999

Ámbito: GUI - La autenticidad, validez e integridad de este documento puede ser verificada mediante el "Código Seguro de Verificación (CSV)" en la dirección https://sede.uned.es/valida/
A197BC6115D919DE4AA9BF16C2912CFA

Autor/es:Gasquet, Claude ; Witomski, Patrick ;
Editorial:Springer

ISBN(13):9788415550624
Título:ESPACIOS DE HILBERT Y ANÁLISIS DE FOURIER: LOS PRIMEROS PASOSSegunda edición 2014
Autor/es:García García, Antonio ; Muñoz Bouzo, Mª José ;
Editorial:SANZ Y TORRES, S.L.

Introduction to Hilbert Space de S.K. Berberian
Existen diversas impresiones en distintas editoriales de la segunda edición, p.e., en Oxford University Press (1961) o incluso una edición en castellano en la editorial Teide (1970) que aunque está descatalogada, sí existe en muchas bibliotecas. Libro de introducción a los espacios de Hilbert con números ejercicios. No estudia sin embargo ni las series de Fourier clásicas, ni la transformada de Fourier ni operadores de convolución ni los espacios de Hilbert con núcleo reproductor.

An Introduction to Hilbert Space de N. Young
Es un texto de introducción a los espacios de Hilbert que se complementa con aplicaciones de la teoría a las soluciones de las ecuaciones en derivadas parciales y a la aproximación de funciones de variable compleja. Contiene números ejemplos y ejercicios. No cubre la transformada de Fourier ni operadores de convolución ni los espacios de Hilbert con núcleo reproductor.

Fourier Analysis and Applications de C. Gasquet y P. Witomski
Es un magnífico texto de ampliación donde las nociones fundamentales del Análisis de Fourier se aplican en análisis de señales (análisis de tiempo-frecuencia, tiempo-escala y el procesado de señales). El libro original es en francés (ed. Dunod) aunque existe una traducción al inglés (1999, ed. Springer Verlag).

RECURSOS DE APOYO Y WEBGRAFÍA

Curso Virtual. La UNED pone a disposición de los alumnos un curso virtual atendido por profesores en el cual se abren posibilidades como la comunicación con un tutor virtual que resolverá las dudas tanto generales como específicas de la asignatura, la comunicación entre alumnos de la asignatura en el foro de alumnos y además se irán abriendo foros con cuestiones específicas de temas concretos en el que los alumnos podrán intercambiar soluciones, correcciones a otros alumnos y en el que el profesor sólo intervendrá cuando sea necesario para reconducir el debate.

Ámbito: GUI - La autenticidad, validez e integridad de este documento puede ser verificada mediante el "Código Seguro de Verificación (CSV)" en la dirección https://sede.uned.es/valida/
A197BC6115D919DE4AA9BF16C2912CFA

IGUALDAD DE GÉNERO

En coherencia con el valor asumido de la igualdad de género, todas las denominaciones que en esta Guía hacen referencia a órganos de gobierno unipersonales, de representación, o miembros de la comunidad universitaria y se efectúan en género masculino, cuando no se hayan sustituido por términos genéricos, se entenderán hechas indistintamente en género femenino o masculino, según el sexo del titular que los desempeñe.

Ámbito: GUI - La autenticidad, validez e integridad de este documento puede ser verificada mediante el "Código Seguro de Verificación (CSV)" en la dirección https://sede.uned.es/valida/
A197BC6115D919DE4AA9BF16C2912CFA