

CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Curso 2011/2012

(Código:21152097)

1.PRESENTACIÓN

Dentro del Máster de Matemáticas Avanzadas, la asignatura "Cálculo de Probabilidades" pertenece a la especialidad de "Estadística e Investigación Operativa". Esta asignatura está adscrita al Departamento de Estadística, Investigación Operativa y Cálculo Numérico de la UNED. Se imparte en el primer semestre del Módulo I, de adaptación curricular, y tiene asignados 7,5 créditos ECTS.

En esta Guía del Curso se expone toda la información relevante sobre esta asignatura (prerrequisitos, temario, metodología, objetivos de aprendizaje, etc.).

2.CONTEXTUALIZACIÓN

En esta asignatura, que se sitúa dentro del Módulo I de este máster, se sientan las bases generales del cálculo de probabilidades, con un enfoque matemático riguroso. Dentro del máster, su prolongación natural es la asignatura del Módulo II: "Procesos estocásticos e introducción a los modelos financieros". Se trata, además, de la única asignatura del máster que, específicamente, trata del cálculo de probabilidades.

En términos generales, el cálculo de probabilidades es una de las más importantes ramas de las matemáticas, siendo además un campo de investigación muy activo. Además, está en la base de otras ramas también muy activas y en boga como son la estadística (en sus diversas vertientes) y el cálculo estocástico. Todas estas derivaciones de la probabilidad son objeto de varias asignaturas de este máster.

Finalmente, mencionemos que todas las competencias generales del máster se adquieren, en parte, con el estudio de la asignatura. Éstas son:

1. Conocimientos generales avanzados de una de las principales áreas de las matemáticas;
2. Saber aplicar técnicas y métodos matemáticos a diversos problemas de la realidad (esto quedará aclarado con más detalle en el epígrafe de esta guía didáctica "Objetivos");
3. Capacidad de enfrentarse con literatura científica en varios niveles (en la bibliografía, se recomendarán efectivamente libros de distintos niveles);
4. Capacidad de comunicación de resultados en entornos especializados (véase el apartado "Metodología y plan de trabajo");
5. Iniciación a la adquisición de la competencia científica suficiente para la incorporación a estudios de doctorado.

3.REQUISITOS PREVIOS RECOMENDABLES

Para abordar esta asignatura, el alumno debe tener conocimientos previos de análisis real en una y varias variables (especialmente, de teoría de la integración, incluyendo el teorema del cambio de variable) y de álgebra lineal (aplicaciones lineales y formas cuadráticas). También sería deseable, aunque no imprescindible, que tuviese alguna noción básica de teoría de la medida y de análisis complejo.

La asignatura es auto-contenida, en el sentido de que no requiere, específicamente, conocimientos previos de probabilidad. De todos modos, dado su nivel avanzado, es preferible que los alumnos hayan cursado ya, durante el grado, alguna asignatura de probabilidad. Éste será el caso de los alumnos que provengan de un grado en matemáticas, o de aquéllos que



provengan de algún grado de tipo técnico.

4.RESULTADOS DE APRENDIZAJE

A continuación, detallamos los objetivos de aprendizaje.

Conocimientos.

1. Concepto de medida y medibilidad (en la recta real, en espacios euclídeos y espacios generales),
2. Concepto de independencia, probabilidad condicionada, esperanza y esperanza condicionada.
3. Funciones de distribución (reales y multidimensionales), diferentes tipos y teoremas de descomposición. Variables y vectores aleatorios. Distribuciones marginales y condicionadas. Independencia de variables aleatorias.
4. Convergencia de variables aleatorias. Teorema central del límite. Leyes fuertes y débiles de los grandes números. Convergencia de series de variables aleatorias.

Destrezas.

1. Fomentar y educar la intuición probabilística de manera segura y sin incurrir en los errores más habituales.
2. Plantear un modelo probabilístico, lograr identificarlo adecuadamente dentro de la familia de modelos estudiados (en particular, deducir la función de distribución correspondiente, obteniendo sus principales características);
3. Demostrar cuestiones teóricas de manera rigurosa, familiarizándose con los métodos de demostración de la teoría de la medida y del cálculo de probabilidades (e.g., el método de los “buenos conjuntos”, el principio de reflexión, el principio de inclusión-exclusión, etc.);
4. Adquirir soltura (tanto intuitiva como formal) con los conceptos de esperanza y esperanza condicionada.

Competencias.

1. Para una “situación real” dada, ser capaz de modelar su estructura probabilística subyacente, logrando abstraerse de la “situación real” al modelo teórico y así extraer sus principales propiedades. Tras ello, ser capaz de regresar del modelo teórico al modelo real, y evaluar las consecuencias prácticas de los resultados teóricos obtenidos.
2. Adquirir las competencias necesarias que permitan abordar las asignaturas posteriores de este máster que requieren conocimientos de probabilidad (concretamente, las asignaturas de estadística y de procesos estocásticos).

5.CONTENIDOS DE LA ASIGNATURA

Los contenidos de la asignatura se dividen, principalmente, en cuatro bloques que a continuación detallamos.

Bloque 1. Medida y probabilidad. Tras una motivación mediante ejemplos de los problemas de probabilidad “continuos” y del concepto de longitud de un subconjunto de la recta real, se da la definición formal de los espacios de medida y de probabilidad, y se estudian más concretamente las definiciones formales de longitud, área y volumen en espacios euclídeos. También se introducen los conceptos de probabilidad condicionada, independencia de sucesos, y se demuestran algunos resultados clásicos como los lemas de Borel-Cantelli.

Bloque 2. Variables aleatorias. Se estudian las funciones de distribución reales y su correspondencia con las medidas de probabilidad sobre la recta real. Se estudian los tipos principales de distribuciones (discretas, absolutamente continuas y singulares). Se introduce el concepto de variable aleatoria. Se estudian conceptos como la esperanza matemática, momentos de una variable aleatoria, función característica y teoremas de inversión, e independencia de variables aleatorias. También se dan algunos elementos de análisis descriptivo de variables aleatorias. Se presentan las distribuciones unidimensionales más habituales.

Bloque 3. Vectores aleatorios. Todos los conceptos del bloque anterior se generalizan a espacios reales multidimensionales. En concreto, el concepto de función de distribución y sus distintos tipos, vector aleatorio, distribuciones marginales y condicionadas, esperanza condicionada, momentos, función característica, y también nociones de análisis descriptivo. Se presta especial atención al estudio de la distribución normal.

Bloque 4. Convergencia. En este último bloque se estudian los distintos tipos de convergencia de variables aleatorias;



concretamente, la convergencia casi segura, en medida, en media de orden p , y en distribución. También se analizan las distintas implicaciones que existen entre estas convergencias. Se termina con el estudio del teorema central del límite (en la formulación de Feller), las leyes de los grandes números, el estudio de la convergencia de series de variables aleatorias, y la ley del logaritmo iterado.

6.EQUIPO DOCENTE

- [JUAN MIGUEL VICTOR HERNANDEZ MORALES](#)
- [TOMAS PRIETO RUMEAU](#)
- [RICARDO VELEZ IBARROLA](#)

7.METODOLOGÍA

La metodología básica de aprendizaje es el estudio del libro de texto. En él, se desarrollan con claridad y con un enfoque muy didáctico todos los contenidos del curso.

Creemos que el aprendizaje debe articularse en tres etapas principales (que son simultáneas a lo largo del estudio). La primera consiste en la comprensión de todos los resultados teóricos (informalmente dicho, sería la asimilación de los enunciados de los teoremas), y su manejo con soltura y sin ningún género de dudas. La segunda etapa consiste en la comprensión detallada de las demostraciones de dichos resultados. Esta etapa nos parece muy importante dado que el conocimiento de la demostración de un teorema le da, subjetivamente, mayor verosimilitud, además de que permite al alumno familiarizarse con las técnicas habituales de demostración en cálculo de probabilidades. La tercera etapa es la realización de ejercicios y problemas. Al enfrentarse a estos ejercicios, el alumno es capaz de calibrar hasta qué punto ha adquirido los conceptos teóricos adecuadamente. Con este fin, el libro de texto propone numerosos ejercicios resueltos. Con esto, se espera que el alumno desarrolle la competencia de comunicación de resultados a un nivel elevado de rigor matemático.

Con respecto a la metodología de la enseñanza a distancia, el libro de texto ha sido diseñado teniendo en cuenta las particularidades del estudio a distancia, el cual tiene una muy elevada componente de estudio en solitario. Se propondrá además al alumno una bibliografía complementaria de otros textos y de libros de problemas con los que podrá afianzar sus conocimientos.

Con el objeto de que el alumno pueda auto-evaluarse, se le proporcionarán colecciones de exámenes anteriores de esta asignatura o de otras similares. Finalmente, dentro del "curso virtual" de la asignatura, el alumno podrá hacer consultas directas al equipo docente, así como compartir sus progresos y dudas con sus otros compañeros.

Plan de trabajo de los alumnos.

Se propone a los alumnos que articulen el estudio de la asignatura en cuatro fases principales, que se detallan a continuación.

1. En la primera fase, se recomienda hacer una lectura detenida de las definiciones y teoremas principales, sin entrar en los detalles de su demostración. También se deberán estudiar en detalle los ejemplos del libro.
2. La segunda fase consiste en una lectura más profunda de los resultados teóricos, comprendiendo y asimilando las demostraciones de los teoremas.
3. En la tercera fase, el alumno tratará de hacer los ejercicios que se proponen en el libro de texto, pudiendo consultar las soluciones que se encuentran al final del libro de texto.
4. Finalmente, la cuarta fase consiste en hacer exámenes similares al que se propondrá en la prueba presencial.

En el siguiente cuadro se especifica el tiempo, en horas, que se sugiere dedicar a cada una de estas fases en cada uno de los cuatro bloques en que se divide la asignatura. Nótese que estos bloques coinciden con el desarrollo del temario en el libro de texto.

Bloque	Conocimientos	Destrezas	1ª fase	2ª fase	3ª fase
1	1,	1,2	15	5	10
2	1,2,3	1,2,3,4	15	10	5



3	1,2,3	1,2,3,4	30	10	20
4	2,4	3,4	15	5	10

Realización de exámenes de prueba: 10 horas.

Tutorización y curso virtual: 27,5 horas.

En total, se obtienen 187,5 horas de trabajo personal del alumno.

A continuación, se detallan los contenidos de cada uno de los cuatro bloques de que se compone esta asignatura, mencionando cuáles son los conceptos que, tras su estudio, debe dominar el alumno. Asimismo, se da una orientación del tiempo (en semanas) que debería dedicar el alumno al estudio de los temas, teniendo en cuenta que un cuatrimestre consta, aproximadamente, de quince semanas.

Bloque 1. Medida y probabilidad.

- Semana 1. Medida. Ejemplos de motivación. Definición y propiedades de las sigma-álgebras. Sigma-álgebra de Borel. Definición formal de longitud, área y volumen.
- Semana 2. Espacios de probabilidad. Espacios muestrales. Espacios de probabilidad. Probabilidad condicionada de sucesos. Independencia de sucesos.
- Semana 3. Probabilidades en la recta real. Funciones de distribución reales. Correspondencia entre probabilidades reales y funciones de distribución. Clasificación de distribuciones según sean discretas, absolutamente continuas o singulares. Descomposición de distribuciones.

Bloque 2. Variables aleatorias.

- Semana 4. Variables aleatorias. Definición de variable aleatoria. Función de distribución de una variable aleatoria. Tipos de variables aleatorias según su función de distribución. Cambio de variable: transformaciones de variables discretas y absolutamente continuas.
- Semana 5. Independencia de variables aleatorias. Definición de independencia de variables aleatorias. Espacios producto. Suma de variables aleatorias independientes.
- Semana 6. Esperanza matemática. Valor esperado de una variable aleatoria. Propiedades de la esperanza matemática. Esperanza condicionada. Función característica. Teoremas de inversión.

Bloque 3. Vectores aleatorios.

- Semana 7. Probabilidades en el plano real. Funciones de distribución bidimensionales. Clasificación de distribuciones bidimensionales (discretas, absolutamente continuas, singulares). Vectores aleatorios bidimensionales.
- Semana 8. Distribuciones marginales y condicionadas. Distribución marginal. Distribución condicionada. Obtención de la distribución a partir de las marginales y las condicionadas. Independencia.
- Semana 9. Probabilidades en espacios euclídeos. Funciones de distribución k-dimensionales. Clasificación de funciones de distribución k-dimensionales. Vectores aleatorios k-dimensionales. Distribuciones marginales y condicionadas. Función característica.
- Semana 10. Análisis descriptivo de distribuciones. Medidas de dispersión y posición de funciones de distribución reales. Momentos de una función de distribución unidimensional y k-dimensional. Regresión bidimensional y k-dimensional.
- Semana 11. Distribución normal. Función de densidad normal k-dimensional. Singularidad. Marginales, independencia, condicionales. Combinaciones lineales de variables normales.

Bloque 4. Convergencia.

- Semana 12. Convergencia de variables aleatorias. Distintos tipos de convergencia: casi segura, en probabilidad, en media de orden p , en distribución. Extensión a vectores aleatorios.
- Semana 13. Teorema central del límite. Teoremas centrales del límite de Lévy, Lyapunov, Lindeberg y Feller. Caso de vectores aleatorios.
- Semana 14. Leyes de los grandes números. Leyes fuertes y débiles de los grandes números. Convergencia de



series de variables aleatorias. Caso de variables simétricas. El teorema de las tres series. Ley del logaritmo iterado.

Finalmente, se sugiere dedicar la Semana 15 a los ejercicios de auto-evaluación y al repaso de la asignatura.

8.BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

Comentarios y anexos:

El libro de texto de la asignatura es

Vélez Ibarrola, R. (2004). *Cálculo de Probabilidades 2*. Ediciones Académicas.

9.BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

Comentarios y anexos:

Bibliografía complementaria.

Otros libros básicos de teoría son:

1. Ash, R.B. (1970). *Basic Probability Theory*. John Wiley.
2. Burrill, C.W. (1972). *Measure, Integration and Probability*. Mc Graw-Hill
3. García, A., Quesada, V. (1998). *Lecciones de Cálculo de Probabilidades*. Díaz de Santos.
4. Ibarrola, P., Pardo, L., Quesada, V. (1997). *Teoría de la Probabilidad*. Síntesis.
5. Rohatgi, V.K. (1976). *An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics*. John Wiley.
6. Vélez, R., Hernández, V. (1995). *Cálculo de Probabilidades 1*. UNED

Dos libros clásicos de probabilidad son

1. Feller, W. (1966). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Vol. 1. John Wiley.
2. Feller, W. (1966). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Vol.2. John Wiley.

Como bibliografía de problemas se propone

1. Cuadras, C.M. (2002). *Problemas de Probabilidad y Estadística*. PPU Barcelona.
2. Montero, J., Pardo, L, Morales, D., Quesada, V. (1988). *Ejercicios y Problemas de Cálculo de Probabilidades*. Díaz de Santos.

Libros de nivel más avanzado son

1. Ash, R.B. (1972). *Real Analysis and Probability*. Academia Press.
2. Billingsley, P. (1968). *Convergence of Probability Measures*. John Wiley.
3. Billingsley, P. (1980). *Probability and Measure*. John Wiley.
4. Breiman, L. (1968). *Probability*. Addison-Wesley.

10.RECURSOS DE APOYO AL ESTUDIO

El alumno contará, además, con el curso virtual de la asignatura, en el que tendrá acceso a diverso material teórico y práctico, y a través del cual podrá comunicarse con el equipo docente y con sus compañeros de asignatura.

11.TUTORIZACIÓN Y SEGUIMIENTO



La tutorización se hará, principalmente, a través del curso virtual de la asignatura y de los foros contenidos en el curso virtual.

También podrán hacerse tutorías presenciales o telefónicas con los miembros del equipo docente:

- Hernández Morales, Víctor. Despacho 1.11 de la Facultad de Ciencias. Teléfono 91 398 72 52. Martes lectivos de 12h00 a 14h00 y de 18h00 a 20h00. Correo electrónico: victorher@ccia.uned.es
- Prieto Rumeau, Tomás. Despacho 1.15 de la Facultad de Ciencias. Teléfono 91 398 78 12. Miércoles lectivos de 16h30 a 20h30. Correo electrónico: tprieto@ccia.uned.es
- Vélez Ibarrola, Ricardo. Despacho 1.14 de la Facultad de Ciencias. Teléfono 91 398 72 58. Miércoles lectivos de 16h30 a 20h30. Correo electrónico: rvelez@ccia.uned.es

La dirección de correo ordinario, para todos los miembros del equipo docente, es:

Departamento de Estadística, Investigación Operativa y Cálculo Numérico.

Facultad de Ciencias, UNED.

Calle Senda del Rey 9, 28040, Madrid.

12.EVALUACIÓN DE LOS APRENDIZAJES

La evaluación del aprendizaje se hará mediante la prueba presencial que el alumno realizará en el Centro Asociado de la UNED.

Esta prueba presencial tendrá una duración de dos horas. Consistirá de cinco cuestiones de tipo teórico (se podrán pedir enunciados de definiciones, y enunciados y demostraciones de teoremas) y práctico (estos ejercicios podrán ser de carácter teórico o aplicado; en todo caso, serán del tipo de los propuestos en el libro de texto). No se podrá utilizar ningún tipo de material durante el examen.

Para evaluar la prueba presencial, se tendrá en cuenta la corrección de los resultados, el rigor matemático de la exposición, y la concisión y claridad de la redacción.

13.COLABORADORES DOCENTES

Véase equipo docente.

