

# TEORÍA DE ANILLOS Y CUERPOS

Curso 2011/2012

(Código: 21152218)

## 1. PRESENTACIÓN

En esta asignatura se continúa con el estudio de las estructuras algebraicas no lineales, iniciado con la asignatura Teoría de Grupos. Aquí se da el significado matemático riguroso a conceptos algebraicos que el alumno ha manejado hasta ahora, como la teoría de números y los anillos de polinomios. Sus aplicaciones a la ciencia son innumerables tanto dentro como fuera de las matemáticas. En este mismo curso se hace un fuerte hincapié en una de las más significativas en matemática pura: la resolubilidad de las ecuaciones algebraicas.

En síntesis, la Teoría de Anillos y Cuerpos es esencia de una buena parte de los campos más activos de la Matemática pura y de la Física teórica, como computación, Criptografía, Geometría Algebraica y Física Cuántica.

## 2. CONTEXTUALIZACIÓN

En esta asignatura se continúa con el estudio de las estructuras algebraicas no lineales, iniciado con la asignatura Teoría de Grupos. Aquí se da el significado matemático riguroso a conceptos algebraicos que el alumno ha manejado hasta ahora, como la teoría de números y los anillos de polinomios. Sus aplicaciones a la ciencia son innumerables tanto dentro como fuera de las matemáticas. En este mismo curso se hace un fuerte hincapié en una de las más significativas en matemática pura: la resolubilidad de las ecuaciones algebraicas.

En síntesis, la Teoría de Anillos y Cuerpos es esencia de una buena parte de los campos más activos de la Matemática pura y de la Física teórica, como computación, Criptografía, Geometría Algebraica y Física Cuántica.

Podemos señalar como competencias generales de este Master, las siguientes:

1. Adquirir conocimientos de un área esencial dentro de las Matemáticas.
2. Saber aplicar métodos algebraicos a diversos problemas de la realidad.
3. Poner en contacto al alumno con literatura científica de cierto nivel.
4. Adquirir conocimientos que interrelacionan entre sí las diferentes disciplinas de los cursos de doctorado.

## 3. REQUISITOS PREVIOS RECOMENDABLES

Los prerrequisitos para abordar el estudio de este Master comprenden el lenguaje elemental de la teoría de grupos y la de los números enteros y racionales. También se necesita una formación sólida en Álgebra Lineal y que el alumno tenga claro los conceptos de espacio vectorial y de aplicación lineal. En ocasiones se utilizarán nociones de Análisis Matemático, aunque



no de forma esencial.

#### 4.RESULTADOS DE APRENDIZAJE

##### Conocimientos:

1. Conocer los conceptos de anillo, subanillo e ideal.
2. Saber usar el algoritmo de la división en polinomios.
3. Conocer las propiedades de factorización de los anillos de polinomios.
4. Aplicar criterios de irreducibilidad de polinomios.
5. Definir el concepto de cuerpo y extensión de un cuerpo dado.
6. Conocer los conceptos de extensión simple, finito generada y trascendente.
7. Saber qué es un grupo de automorfismos asociado a una extensión de cuerpos dada.
8. Identificar los subcuerpos fijos de un grupo de automorfismos.
9. Conocer los teoremas de Galois.

##### Destrezas y habilidades:

1. Dotar a un conjunto de estructura de anillo.
2. Distinguir subconjuntos notables en un anillo: ideales y subanillos.
3. Aplicar el cálculo en congruencias sobre ideales del anillo  $Z$  a resolver problemas concretos de teoría de números y ecuaciones diofánticas.
4. Operar con polinomios en una y varias indeterminadas.
5. Discriminar el carácter irreducible de un polinomio dado.
6. Considerar extensiones de cuerpos como forma de generalizar el estudio de raíces de polinomios.
7. Aplicar la teoría de grupos de automorfismos de Galois a la resolución de ecuaciones.

##### Competencias:

1. El Álgebra abstracta es la disciplina básica en materias posteriores en matemática pura como la Geometría Algebraica y, en menor medida, la Topología Algebraica.



2. Forma parte del lenguaje de buena parte de la física moderna como Mecánica Cuántica y Física de Partículas.

3. Es la esencia de problemas de gran interés hoy en día como los provenientes de la Criptografía.

## 5. CONTENIDOS DE LA ASIGNATURA

1. Anillos. Se introducen las nociones básicas de anillo, ideal, anillo cociente y homomorfismo. Se estudia la divisibilidad de ideales y las propiedades de factorización en dominios de integridad. Por último se estudian las congruencias de números enteros como una aplicación de los anillos cocientes.

2. Polinomios. Se desarrolla un estudio sistemático de los anillos de polinomios en una y varias variables. En primer lugar se definen y estudian las nociones básicas: evaluación y funciones polinomiales, sustitución y componentes homogéneas. Posteriormente se describe el algoritmo de división de polinomios cuando el anillo de coeficientes es un dominio de integridad arbitrario. A continuación se caracterizan los anillos de polinomios que son dominios euclídeos, así como el teorema de Gauss que determina qué anillos de polinomios son dominios de factorización única. Por último se estudian los diferentes criterios de irreducibilidad de polinomios: de Eisenstein y del módulo finito.

3. Extensiones de cuerpos. Se define el concepto de extensión de cuerpos y las propiedades básicas: grado de una extensión, extensiones finito-generadas, dependencia e independencia algebraica. Posteriormente se estudia las extensiones simples algebraicas y las extensiones simples trascendentes. Se demuestra el teorema de Luröth. De igual manera se introduce el grado de trascendencia y se demuestra el teorema del elemento primitivo para cuerpos de característica cero.

4. Teoría de Galois. Se abordan los grupos de automorfismos de las extensiones de cuerpos de característica cero. Se calcula el grupo de automorfismos de una extensión simple trascendente, además se acota el orden del grupo de automorfismos de una extensión finita mediante el grado de la extensión. Posteriormente se analizan las extensiones en las que orden y grado coinciden, o sea, las extensiones de Galois, y se demuestra el teorema fundamental de la teoría: las subextensiones se corresponden biyectivamente con los subgrupos, y las subextensiones de Galois con los subgrupos normales.

## 6. EQUIPO DOCENTE

- [VICTOR FERNANDEZ LAGUNA](#)

## 7. METODOLOGÍA

La metodología y las estrategias de aprendizaje están en consonancia con el contexto específico de educación a distancia de la UNED. En cuanto a la metodología hemos de tener en cuenta que la toma de contacto entre la materia y el alumno queda cristalizada de una forma esencial a través del libro de texto. Es pues necesaria la elaboración de materiales didácticos con una buena estructuración y secuenciación de contenidos. La alternancia de conceptos y ejemplos es clave para alcanzar los objetivos marcados y desarrollar las competencias descritas.

Ha cobrado, de igual forma, gran importancia en los últimos años el uso de las nuevas tecnologías, lo que ha permitido la elaboración de un curso virtual específico de cada asignatura. En un espacio de acceso exclusivo para los alumnos, éstos



pueden proyectar sus dudas y sugerencias en los distintos foros de discusión creados para tal fin, en los que el profesor actúa de moderador esencial. Es una herramienta de relevancia capital en la UNED. El profesor puede volcar, en tiempo real, y de forma muy efectiva para todos los alumnos repartidos por toda la geografía, cualesquiera notaciones, ejercicios, actividades, apuntes, resolución de dudas muy específicas,...

Creemos que una estrategia conveniente para el alumno consiste en articular su trabajo en cada una de las siguientes fases:

- Primera fase: primera lectura explorativa, para conseguir una visión global del tema, sin detenerse en los detalles, pero intentando entender los objetivos de cada tema, sus definiciones y los enunciados de los problemas. Se intentará visualizar mediante los ejemplos propuestos en el texto objetivos, definiciones y enunciados.

- Segunda fase: segunda lectura comprensiva; se afianzarán los puntos más importantes y se buscará entender los detalles más técnicos de las demostraciones. También se recurrirá a una relación de ejercicios que cimienten lo aprendido. Es interesante contactar en el foro con otros compañeros y compartir y ayudarse en las dificultades.

. Tercera fase: lectura afianzativa: en esta etapa el alumno se enfrentará al mayor número posible de problemas, con el fin de que los resultados del tema queden definitivamente aprendidos. El profesor planteará a través del foro tres problemas fundamentales que se consideran indispensables. Su realización es considerada como una verdadera prueba de evaluación a distancia.

- Cuarta fase: Consulta de exámenes de años anteriores y de otros de ejercicios resueltos para poder autoevaluarse.

## 8. BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

Comentarios y anexos:

- Manuel Gamboa y Jesús M. Ruiz, "Anillos y cuerpos conmutativos." UNED Ediciones. Madrid 2002.

- Víctor Fernández, "Problemas de Anillos y cuerpos conmutativos." Sanz y Torres, Madrid 2001.

## 9. BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

Comentarios y anexos:

Son libros cuya adquisición no es obligatoria. Tan sólo han de ser consultados u hojeados en bibliotecas.

- *Libros introductorios y elementales:*

Allenby, R. Rings, fields and groups -an introduction to abstract algebra. Arnold, London.



Clark, A. Elements of abstract algebra. Dover, New York. 1974.

Ehrlich, G. Fundamental concepts of abstract algebra. PWS-KENT, Boston. 1991.

Fraleigh, J. A first course in abstract algebra. Reading (Massachusetts), Addison-Wesley. 1982.

Gallian, J. A. Contemporary abstract Algebra. Health and Company. Massachusetts. 1990.

Pinter, C. A book of abstract algebra. McGraw-Hill, 1990.

- *Libros de un nivel elemental o asequible de teoría de anillos y cuerpos:*

Bhattacharya, P.B., Jain, S. K., Nagpaul, S.R. Basic abstract algebra. Cambridge University Press, 1986.

Childs, L. A concrete introduction to higher Algebra. Undergraduate Texts in Math. Springer- Verlag. 1979.

Donorroso, J., E. Hernández. Números, grupos y anillos. Addison-Wesley. Universidad Autónoma de Madrid. 1996.

Guardia, J., Vila, N. Algebra I: de la práctica a la teoría. Textos Docents. Universitat de Barcelona. 1996.

- *Libros de un nivel superior al texto base, donde se pueden consultar lecturas de ampliación.*

Ellis, G. Rings and fields. Clarendon Press, Oxford. 1992.

Matsumura, H. Commutative rings. Cambridge University Press. 1986.

- *Libros para profundizar, consultar y aplicar la Teoría de Galois.*



Edwards, H. Galois Theory. Springer-Verlag. 1984.

Garling, D. J. H., A course in Galois theory. Cambridge University Press. 1988.

Rotman, J. H. Galois theory. Universitext, Springer-Verlag. 1990.

- *Libros donde se aplican las técnicas de álgebra abstracta en teoría de números.*

Cilleruelo, J., Córdoba A. La teoría de números. Biblioteca Mondadori. 1992.

Le Veque, W. J. Elementary theory of numbers. Dover. 1990.

- *Libros donde el álgebra abstracta ramifica en cálculo computacional, teoría de códigos, criptografía y Geometría algebraica.*

Cohen, H. A course in computational algebraic number theory. GTM 138. Springer-Verlag. 1991.

Cox, D., Little, J., O'Shea, D. Ideals, varieties and algorithms. UTM, Springer-Verlag. 1992.

Hill, R. A First Course in Coding theory. Clarendon Press. Oxford. 1986.

Hoffman (et al.) Coding Theory: the essentials. Marcel Decker. Inc., New-York. 1992.

Koblitz, N. A course in number theory and cryptography. GTM 114, Springer-Verlag. 1992.

## 10. RECURSOS DE APOYO AL ESTUDIO

1. Curso virtual donde se encuentran materiales de apoyo al estudio; foros y correos electrónico entre profesor y alumnos.
2. La UNED tiene una licencia de campus del programa de cálculo simbólico Maple, con el que el alumno puede encontrar un verdadero laboratorio para la experimentación con muchos de los conceptos aprendidos en el curso como cálculo en congruencias, divisibilidad e irreducibilidad de polinomios, factorización, etc.

## 11. TUTORIZACIÓN Y SEGUIMIENTO



La tutorización se realizará principalmente en los foros del curso virtual de la asignatura.

El alumno que desee una tutoría presencial y/o telefónica podrá realizarla los martes de 15 a 19 h. en el despacho 126(B) de la Facultad de Ciencias. Fuera de este horario se atenderá concertando previamente una cita en el teléfono 91 398 72 48.

## 12.EVALUACIÓN DE LOS APRENDIZAJES

La evaluación de los aprendizajes se llevará a cabo mediante una prueba presencial en el Centro Asociado correspondiente. Su duración será de dos horas.

La prueba consistirá en una serie de ejercicios. Los ejercicios podrán ser prácticos (problemas similares a los de la bibliografía básica) o teóricos (cuestiones o bien demostraciones de resultados teóricos en uno o varios pasos).

No se podrá utilizar ningún tipo de material durante la realización del examen.

En general, el objetivo de la prueba presencial es valorar el grado de comprensión de la materia. Para ello se tendrá en cuenta el planteamiento razonado de la solución al problema y también la buena exposición.

## 13.COLABORADORES DOCENTES

Véase equipo docente.

