

# SUPERFICIES DE RIEMANN

Curso 2012/2013

(Código: 2115235-)

## 1. PRESENTACIÓN

En esta asignatura se toma contacto con uno de los pilares más importantes de la matemática actual: la teoría de Superficies de Riemann. Es preciso comprender este concepto como la cristalización geométrica sobre una variedad topológica 2-dimensional del análisis holomorfo sobre el plano complejo. Posteriormente nos ocuparemos de distinguir las superficies de Riemann simplemente conexas e introduciremos el estudio de aquellas que son compactas.

## 2. CONTEXTUALIZACIÓN

En este curso se introduce uno de los temas más importantes en la investigación actual en Matemáticas Fundamentales, el de las superficies de Riemann. Su interés enorme se fundamenta en su riquísima proyección histórica, que desde el siglo XIX ha acaparado las energías de algunos de los mejores matemáticos de todos los tiempos: Riemann, Jacobi, Abel, Weierstrass, Cauchy, etc. Es sorprendente que desde sus orígenes, como una forma de extender el plano complejo como dominio de las funciones multivaluadas, haya llegado a ocupar una posición indiscutiblemente central, relacionando análisis, geometría hiperbólica, teoría de números, geometría algebraica, teoría de grupos y topología.

Dentro de este amplísimo campo, se han elegido algunos temas para que el alumno encuentre algún punto de interés, que puedan llevarle a sus primeras singladuras como investigador.

## 3. REQUISITOS PREVIOS RECOMENDABLES

Los prerrequisitos para abordar el estudio de este Master comprenden el Análisis I y II y un primer curso de funciones de una variable compleja. Aunque a comienzos del curso se dará un repaso somero a los puntos más esenciales del análisis holomorfo, es necesario dominar los conceptos más elementales del cálculo diferencial e integral sobre el plano euclídeo: derivadas parciales, integrales de línea, 1-formas y 2-formas diferenciales y el teorema de Stokes.

## 4. RESULTADOS DE APRENDIZAJE

Señalamos las siguientes destrezas y competencias específicas que se adquirirán en este curso.

Destrezas: Manejar atlas analíticos, funciones, diferenciales meromorfas, y automorfismos en superficies de Riemann.

Competencias: Adentrarse en el problema de la clasificación de superficies de Riemann, tanto de las llamadas excepcionales como de aquellas a las que éstas recubren, especialmente las compactas.

Así mismo, como competencias genéricas, incluimos:



1. Adquirir conocimientos generales de un área esencial dentro de las Matemáticas y de la actividad investigadora actual.
2. Acceder y manejar literatura científica a través de las publicaciones periódicas de prestigio internacional.
3. Proporcionar competencias científicas para iniciarse en tareas de investigación.

## 5. CONTENIDOS DE LA ASIGNATURA

1. Fundamentos. En primer lugar se repasan los conceptos fundamentales del análisis holomorfo: ecuaciones de Cauchy-Riemann, fórmula integral de Cauchy, analiticidad de funciones complejas y teorema de Morera. Se incide también el estudio de las singularidades de las funciones meromorfas. Posteriormente se define el concepto de superficie de Riemann al que inmediatamente se trasladan los conceptos de función y diferencial meromorfa. Se define el concepto de morfismo holomorfo entre superficies de Riemann, interpretando especialmente aquellos que valoran en la esfera de Riemann.
1. Automorfismos de las superficies de Riemann notables. Se introduce el importante tópico del grupo de automorfismos de una superficie de Riemann. Como aplicación del cómputo del cuerpo de las funciones meromorfas de la esfera de Riemann, se calculan sus automorfismos conformes y entre ellos se estudia aquellos que restringen al plano  $C$ . Posteriormente se demuestra el lema de Schwarz sobre los movimientos holomorfos del disco unidad  $D$  que fijan el origen y como aplicación se calculan todos los automorfismos de  $D$ .
1. Superficies de Riemann no compactas. El objetivo esencial de este capítulo es abordar la clasificación de las superficies de Riemann simplemente conexas. Se comienza demostrando el importante teorema de Riemann sobre abiertos simplemente conexos del plano  $C$ . Posteriormente se enuncia el teorema fundamental de la representación conforme y, admitiendo varios resultados de la teoría de funciones, se da un bosquejo de su demostración.
1. Superficies de Riemann compactas. Se comienza este capítulo repasando algunos conceptos de la topología de las variedades de dimensión dos compactas y orientables. Posteriormente se definen conceptos de gran potencia en geometría como haces y cohomología. Se define el género en función de la cohomología del anillado, los divisores como el grupo libre generado por los puntos de la superficie de Riemann y se enuncia el teorema de Riemann-Roch. Se da comienzo al estudio de las superficies de Riemann elípticas, con la función  $p$  de Weierstrass, y las superficies hiperelípticas.

## 6. EQUIPO DOCENTE

- [FRANCISCO JAVIER CIRRE TORRES](#)

## 7. METODOLOGÍA

En cuanto a la metodología hemos de tener en cuenta el contexto específico de la UNED en la educación a distancia. La toma de contacto entre profesor y alumno queda cristalizada de una forma esencial a través del libro de texto. Es pues necesaria la elaboración de materiales didácticos con una buena estructuración y secuenciación de contenidos, donde la alternancia de conceptos y ejemplos es clave para alcanzar los objetivos marcados y desarrollar las competencias descritas.



Ha cobrado, de igual forma, gran importancia en los últimos años la articulación de la asignatura por medio de la virtualización en la red. En un espacio cerrado al mundo exterior, los alumnos pueden proyectar sus dudas y sugerencias en los foros de discusión, creados para tal fin, en los que el profesor actúa de moderador esencial. Es una herramienta que cobrará relevancia capital en la UNED. El profesor puede volcar, en tiempo real, y de forma muy efectiva para todos los alumnos repartidos por toda la geografía, cualesquiera notaciones, ejercicios, actividades, apuntes, resolución de dudas muy específicas,...

Creemos que una estrategia a seguir por parte del alumno puede ser articular su trabajo en cada una de las siguientes fases:

- Primera fase: lectura explorativa: se intentan entender los objetivos de cada tema y se incide en la comprensión de las definiciones y enunciados de los problemas. Se intentará visualizar mediante los ejemplos propuestos en el texto objetivos, definiciones y enunciados.

- Segunda fase: lectura comprensiva: se afianzarán los puntos más importantes. Se buscará entender los detalles más técnicos de las demostraciones y se incluirá una relación de ejercicios que refuerce lo aprendido. Es interesante contactar en el foro con otros compañeros y compartir conocimientos y ayudarse en las dificultades.

. Tercera fase: lectura afianzativa, en la que el alumno tratará de resolver el mayor número posible de problemas. El profesor planteará a través del foro tres problemas fundamentales que se consideran indispensables. Su realización es considerada como una verdadera prueba de evaluación a distancia.

## 8. BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

Comentarios y anexos:

Este curso está desarrollado totalmente en las notas "Superficies de Riemann" preparadas por Arturo Fernández Arias y Javier Pérez Álvarez, que serán presentadas a los alumnos a través del entorno aIF de la asignatura.

## 9. BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

ISBN(13): 9780387904658  
Título: RIEMANN SURFACES  
Autor/es: Kra, Irwin ;  
Editorial: Springer

Buscarlo en librería virtual UNED



Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Buscarlo en Catálogo del Patrimonio Bibliográfico

ISBN(13): 9780387906171

Título: LECTURES ON RIEMANN SURFACES ([1st ed., (2nd printing corr.)])

Autor/es: Gilligan, Bruce ;

Editorial: Springer

Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Buscarlo en Catálogo del Patrimonio Bibliográfico

ISBN(13): 9780471050599

Título: PRINCIPLES OF ALGEBRAIC GEOMETRY

Autor/es: Harris, Joseph ;

Editorial: JOHN WILEY AND SONS

Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Buscarlo en Catálogo del Patrimonio Bibliográfico

ISBN(13): 9780521313667

Título: COMPLEX FUNCTIONS :

Autor/es: Jones, Gareth A. ; Singerman, David ;

Editorial: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS

Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Buscarlo en Catálogo del Patrimonio Bibliográfico

ISBN(13): 9780521423533

Título: COMPLEX ALGEBRAIC CURVES

Autor/es:

Editorial: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS



Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Buscarlo en Catálogo del Patrimonio Bibliográfico

ISBN(13): 9783540501244

Título: AN INTRODUCTION TO RIEMANN SURFACES, ALGEBRAIC CURVES AND MODULISPACES

Autor/es:

Editorial: Springer

Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Buscarlo en Catálogo del Patrimonio Bibliográfico

ISBN(13): 9783764327422

Título: COMPACT RIEMANN SURFACES

Autor/es:

Editorial: BIRKHÄUSER

Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Buscarlo en Catálogo del Patrimonio Bibliográfico

## 10. RECURSOS DE APOYO AL ESTUDIO

1. En el curso virtual de la plataforma aIF, se encuentran materiales de apoyo al estudio, así como diversas herramientas de comunicación entre profesor y alumnos.

2. La UNED tiene una licencia de campus del programa "Scientific Work Place", que además de contener un potente y profesional paquete editor científico incluye el programa Maple. Es éste un verdadero laboratorio en el que el alumno puede encontrar apoyo a muchos de los conceptos aprendidos en el curso.



## 11.TUTORIZACIÓN Y SEGUIMIENTO

La tutorización se realizará principalmente en los foros del curso virtual de la asignatura.

El profesor se encontrará de guardia los viernes de 16 a 20 horas en el teléfono 91 398 72 45, en el despacho 134 de la Facultad de Ciencias. Es posible contactar también, en cualquier momento, a través del correo electrónico j1235a@hotmail.com.

## 12.EVALUACIÓN DE LOS APRENDIZAJES

La evaluación de los aprendizajes se llevará a cabo mediante una prueba presencial en el Centro Asociado correspondiente. Su duración será de dos horas.

La prueba consistirá en una serie de ejercicios. Los ejercicios podrán ser prácticos (problemas) o teóricos (cuestiones o bien demostraciones de resultados teóricos en uno o varios pasos).

No se podrá utilizar ningún tipo de material durante la realización del examen.

En general, el objetivo de la prueba presencial es valorar el grado de comprensión de la materia. Para ello se tendrá en cuenta el planteamiento razonado de la solución al problema y también la buena exposición.

## 13.COLABORADORES DOCENTES

Véase equipo docente.

