

# OPERADORES EN ESPACIOS DE BANACH

Curso 2014/2015

(Código: 21152398)

## 1. PRESENTACIÓN

Órgano responsable: Departamento de Matemáticas Fundamentales (Facultad de Ciencias, UNED)

Máster en Matemáticas Avanzadas (Módulo II)

Código de la asignatura: 21152398

Semestre: 1º

Créditos ECTS: 7,5

Horas estimadas de trabajo del estudiante: 187,5

Se aconseja repartirlas de la siguiente manera:

75 horas de estudio teórico, 75 de ejercicios, 37,5 de otras actividades: consultas a la plataforma Alf, tareas de evaluación y preparación para las pruebas de evaluación

## 2. CONTEXTUALIZACIÓN

La teoría de los operadores forma parte de una de las grandes ramas de las matemáticas actuales denominada "Análisis Funcional".

En este curso se introducen algunas de las clases de operadores en espacios de Banach más conocidas y estudiadas.

Un espacio de Banach es una estructura algebraica dotada de una topología que se construye a partir de la norma y con la cual el espacio topológico resultante es completo.

La norma que permite definir como base de la topología a las bolas abiertas está estrechamente relacionada con la estructura algebraica de espacio vectorial. Esta relación entre la topología y la estructura algebraica da como resultado comportamientos muy específicos de algunos conceptos topológicos y algebraicos en los espacios de Banach. Sirva de ejemplo el hecho de que un espacio de Banach es de dimensión finita (concepto algebraico) si y solo si la bola unidad cerrada es compacta (concepto topológico).

Los operadores definidos entre espacios de Banach son funciones lineales; es decir que son funciones que respetan la estructura algebraica en la cual trabajamos. Por esta razón, también en el estudio de los operadores nos encontramos con comportamientos muy especiales, como por ejemplo que toda aplicación lineal (propiedad algebraica) que parte de un espacio de dimensión finita es continua (propiedad topológica).

El estudio de los operadores se enriquece cuando trabajamos con espacios de dimensión infinita. Para profundizar en el análisis de los espacios de Banach de dimensión infinita es imprescindible utilizar otras topologías además de la topología de la norma. Por esa razón, el curso empieza recordando cómo se construyen la topología débil y la débil estrella y revisando algunos de los resultados básicos que satisfacen estas topologías y que serán necesarios para profundizar en el estudio de las clases de operadores que se definen después.

## 3. REQUISITOS PREVIOS RECOMENDABLES



Los alumnos que se matriculen en esta asignatura es conveniente que hayan superado un curso de Análisis Funcional, como por ejemplo el que se da en la licenciatura de matemáticas de la UNED con el nombre de Análisis Matemático V, de modo que estén familiarizados con los siguientes conceptos y resultados teóricos: espacios normados, espacios de Banach, el dual y el bidual de un espacio de Banach, topologías débil y débil estrella, conjuntos acotados, compactos y débilmente compactos, los teoremas de Alaoglu, Goldstine, Ascoli-Arselà y el teorema de Eberlein-Smulian.

Estos conceptos y resultados teóricos se repasan brevemente en el la primera unidad didáctica del texto base.

## 4.RESULTADOS DE APRENDIZAJE

Objetivo general: En este curso el estudiante podrá conocer algunas de las clases de operadores mas representativas dentro del análisis funcional y los resultados mas destacados obtenidos para las mismas. Verá distintos modos de introducir familias de operadores y la estrecha conexión entre el comportamiento de los operadores y las estructuras de los espacios de Banach donde están definidos. Por último, el estudiante podrá ver con detalle el caso especial de los operadores compactos que actúan entre espacios de Hilbert, cuyas buenas propiedades nos permiten una clasificación de los mismos mas precisa.

### 1. Conocimientos

- Conocer la definición y la estructura topológica del espacio de Banach formado por los operadores.
- Conocer los teoremas fundamentales que satisfacen los operadores: El teorema de la acotación uniforme, el teorema de la aplicación abierta y el teorema de la gráfica cerrada y entender el papel que juega en la demostración de los mismos el fundamental teorema de topología conocido como Teorema de Baire-Hausdorff.
- Conocer la definición y propiedades fundamentales de los siguientes operadores: de rango finito, isomorfismos, proyecciones, compactos, débilmente compactos, incondicionalmente convergente, absolutamente p-sumantes y de Schatten Von Neuman
- Conocer las relaciones que se dan entre las distintas familias de operadores estudiadas tanto en el caso general como en los espacios de Hilbert.
- Conocer el teorema de Dominación de Pietsch.
- Conocer el teorema de representación de Hilbert-Schmidt.
- Conocer la definición y propiedades fundamentales de los números de aproximación.

### 2. Destrezas y habilidades

- Aprender a usar las caracterizaciones de la norma de un operador para calcularla en casos concretos.
- Aprender a calcular el traspuesto de un operador en los espacios de sucesiones y en los espacios de Hilbert.
- Aprender a relacionar un operador con su traspuesto y su bitraspuesto para obtener información de los mismos.
- Aprender a usar las propiedades mas destacadas de los espacios de Banach para construir operadores que pertenezcan a las familias deseadas.
- Aprender a representar los operadores compactos en los espacios de Hilbert para clasificarlos.

### 3. Competencias

- Conocer las diferentes caracterizaciones de la continuidad ligadas a las condiciones de linealidad.
- Conocer las conexiones entre la continuidad de las aplicaciones lineales con las topologías de la norma y las débiles.
- Conocer la estrecha conexión entre las propiedades de un operador y su traspuesto.
- Conocer las conexiones entre las propiedades de los espacios de Banach y las relaciones entre familias de



operadores.

## 5. CONTENIDOS DE LA ASIGNATURA

La asignatura está dividida en tres grandes bloques:

1. Preliminares En primer lugar se realiza un breve repaso de las nociones y resultados básicos del análisis funcional que vamos a utilizar en los dos bloques posteriores.
2. Operadores especiales. En esta unidad se comienza estudiando las propiedades y los conceptos más básicos asociados a la definición de operador que se utilizarán más adelante en el estudio de los distintos tipos de operadores que se analizan. Después se introducen algunas de las clases de operadores más representativas del análisis funcional: los operadores de rango finito, los isomorfismos, las proyecciones, los operadores compactos, los débilmente compactos y los  $p$ -sumantes. En cada caso se muestran ejemplos concretos, las características más destacadas, la relación con las otras clases estudiadas y las propiedades de los espacios de Banach vinculadas a esa familia de operadores.
3. Operadores compactos en espacios de Hilbert. El último bloque está dedicado al estudio y clasificación de los operadores compactos definidos entre espacios de Hilbert. Veremos cómo a partir de las características especiales de los espacios de Hilbert es posible obtener una representación de los operadores compactos definidos en estos espacios a través de los llamados autovectores y autovalores del operador. Esta representación permite clasificar los operadores compactos según el comportamiento de la familia de los autovalores.

## 6. EQUIPO DOCENTE

- [BEATRIZ HERNANDO BOTO](#)

## 7. METODOLOGÍA

Para alcanzar los resultados de aprendizaje planteados en este curso el estudiante deberá empezar trabajando con los contenidos teóricos propuestos en el texto base. Para facilitar este trabajo el texto base, que ha sido específicamente diseñado para el estudio a distancia, contiene numerosos ejemplos y observaciones que permiten al estudiante hacer propios los conceptos y resultados teóricos que se desarrollan en este curso.

Las dudas y dificultades que el estudiante vaya encontrando serán atendidas por el equipo docente a través de la tutoría virtual o por los diversos medios que la UNED pone al alcance de sus estudiantes: teléfono, fax y correo postal.

En segundo lugar se proponen en el texto base ejercicios intercalados con la teoría que permiten afianzar los contenidos estudiados y aprender a aplicar en casos concretos las técnicas y métodos propios de esta disciplina.

Por último, a través de la tutoría virtual, el alumno podrá trabajar en colaboración con otros estudiantes resolviendo los problemas que el equipo docente proponga e intercambiando conocimientos en los foros.

## 8. BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

Comentarios y anexos:



Texto base:

Operadores en Espacios de Banach.

Autor: Beatriz Hernando

Archivo pdf accesible a través de la tutoría virtual o por correo postal solicitándolo al Equipo Docente.

## 9. BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

ISBN(13): 9780387904276  
Título: LINEAR OPERATORS IN HILBERT SPACES  
Autor/es: Szëucs, Joseph ;  
Editorial: Springer

Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Buscarlo en Catálogo del Patrimonio Bibliográfico

ISBN(13): 9780444705211  
Título: INTRODUCTION TO OPERATOR THEORY AND INVARIANT SUBSPACES  
Autor/es: Bernard Beuzamy ;  
Editorial: NORTH HOLLAND

Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Buscarlo en Catálogo del Patrimonio Bibliográfico

ISBN(13): 9780444890917  
Título: TENSOR NORMS AND OPERATORS IDEALS  
Autor/es: Floret, Klaus ;  
Editorial: NORTH HOLLAND

Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Buscarlo en Catálogo del Patrimonio Bibliográfico



ISBN(13): 9780470226056  
Título: LINEAR OPERATORS  
Autor/es: Schwartz, Jacob T. ; Bartle, Robert G. ; Bade, William G. ;  
Editorial: INTERSCIENCE PUBLISHERS

Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Buscarlo en Catálogo del Patrimonio Bibliográfico

ISBN(13): 9780521431682  
Título: ABSOLUTELY SUMMING OPERATORS  
Autor/es: Tonge, Andrew ; Jarchow, Hans ;  
Editorial: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS

Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Buscarlo en Catálogo del Patrimonio Bibliográfico

ISBN(13): 9783540102106  
Título: FUNCTIONAL ANALYSIS (6th. ed.)  
Autor/es: Yosida, Kosaku ;  
Editorial: Springer

Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Buscarlo en Catálogo del Patrimonio Bibliográfico

#### Comentarios y anexos:

El estudiante podrá ampliar los conocimientos adquiridos con el estudio del texto base, o refrescar los conocimientos de Análisis Funcional que se dan por conocidos, consultando los libros que aparecen en la bibliografía complementaria y también consultando algunos de los Trabajos Fin de Master que realizaron estudiantes en cursos pasados y que podrá conseguir siguiendo los enlaces a los mismos que se ofrecerán en la plataforma virtual.

## 10.RECURSOS DE APOYO AL ESTUDIO



El principal medio de apoyo al estudio es la tutoría virtual que dispone de foros por medio de los cuales el estudiante podrá contactar con el Equipo Docente de la asignatura así como con los demás estudiantes matriculados en el curso.

Otras formas de contactar con el Equipo Docente se detallan en el siguiente apartado.

## 11.TUTORIZACIÓN Y SEGUIMIENTO

Este curso no dispone de tutores en los Centros Asociados porque es un curso altamente especializado y con muy pocos alumnos. Por lo tanto el seguimiento de los alumnos lo realiza exclusivamente el Equipo Docente.

Todos los estudiantes matriculados en este curso podrán contactar con el Equipo Docente a través de los foros de la tutoría virtual y por los siguientes medios:

- Por correo electrónico: bhernan@mat.uned.es

- Por Fax al número: 91 3987107.

- Por teléfono al número: 91 3987247.

- Por correo postal a la dirección:

D<sup>a</sup>. Beatriz Hernando

Departamento de Matemáticas Fundamentales

Facultad de Ciencias

UNED

C/ Senda del Rey 9

28040 Madrid.

Si quiere contactar directamente con la profesora de la asignatura puede llamar al teléfono indicado, o ir a la dirección mencionada (despacho 126b) en el horario de consultas que es:

Martes y jueves de

11:00h a 13:00h

## 12.EVALUACIÓN DE LOS APRENDIZAJES

En este curso se ofrecen tres modelos de evaluación, dos son voluntarios y el tercero es obligatorio.

1. Prueba de evaluación automática en línea. Se fijará un día concreto para realizarla y durante ese día el estudiante que lo desee podrá acceder a la prueba a través de la plataforma virtual Alf. La prueba constará de 10 preguntas de tipo text y tendrá dos horas de duración. La misma plataforma le dará la nota al día siguiente de la prueba. La nota obtenida supondrá un 30% de la nota final.
2. Resolución de problemas. Se ofrecerá a principio de curso, a través de la plataforma virtual, una lista con 10 problemas para resolver. Cada estudiante de forma individual, o en grupos de a lo sumo tres estudiantes, podrá elegir un mínimo de cinco problemas de la lista y entregarlos resueltos antes del 31 de enero. Se puntuarán los cinco



mejores problemas del 0 al 2, de modo que la calificación final puede variar del 0 al 10 y esta nota supondrá un 20% de la calificación final.

3. Examen presencial. En la segunda semana de exámenes de la convocatoria de febrero se establecerá día y hora para realizar la prueba escrita de este curso, que es obligatoria para todos los estudiantes matriculados en el mismo. Esta prueba constará de dos preguntas: una sobre los contenidos del tema 2 y otra sobre los contenidos del tema 3, y durará dos horas. La ponderación de la nota obtenida en esta prueba en la calificación final dependerá de si el estudiante ha realizado alguna o ninguna de las pruebas anteriores, pudiendo variar la ponderación desde el 100%, si el estudiante no ha hecho ninguna de los dos pruebas anteriores, o el 50%, si las ha hecho todas.

AVISO IMPORTANTE: para que las calificaciones obtenidas en una o en las dos primeras pruebas sean tenidas en cuenta es imprescindible obtener en la prueba presencial una calificación igual o superior a 4. Por otro lado, si alguna de las calificaciones de las pruebas voluntarias fuese inferior a la calificación de la prueba presencial, entonces no se tendría en cuenta de modo que no suponga una reducción en la calificación final.

### 13.COLABORADORES DOCENTES

Véase equipo docente.

