ASIGNATURA DE MÁSTER:

INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Curso 2009/2010

(Código:21152010)

1.PRESENTACIÓN

FICHA DE LA ASIGNATURA

Órgano responsable: Departamento de Matemáticas Fundamentales (UNED)
Nombre de la asignatura: Introducción a las Ecuaciones Diferenciales
Semestre: 1º
Créditos ECTS: 7,5
Horas estimadas de trabajo del estudiante: 187,5
Horas de trabajo personal (y en grupo) y otras actividades: 187,5
75 horas de estudio teórico, 75 de ejercicios, 37,5 de otras actividades: laboratorio informático, tutorías, consultas a la virtualización, tareas de evaluación.
Profesorado (indicando el coordinador): Francisco Bernis Carro

Objetivos, destrezas y competencias que se van a adquirir:

El primer objetivo es la adquisición de los conocimientos básicos sobre ecuaciones diferenciales ordinarias.
En segundo lugar se desea mostrar cómo las ecuaciones diferenciales se aplican al estudio de problemas geométricos, físicos y de otras ramas del conocimiento.

Destrezas:
Saber aplicar los conceptos básicos de solución de una ecuación diferencial ordinaria (EDO), orden y forma normal de una EDO, dominio de definición de una solución.
Saber calcular la solución general de las ecuaciones más comunes que admiten integración elemental.
Resolver problemas geométricos sobre curvas, y problemas físicos y de otras Ciencias.
Aplicar los teoremas de existencia y/o unicidad de Peano, Picard (con condición de Lipschitz) y (optativamente) Cauchy (con datos analíticos).
(Optativo): Aplicar los teoremas de dependencia continua y diferenciable con respecto a los datos iniciales y parámetros.

Competencias:
Estar en condiciones de estudiar la asignatura "Ecuaciones y sistemas diferenciales lineales".

Prerrequisitos:
Conocimientos básicos de Geometría euclídea, Álgebra Lineal y Análisis Matemático de varias variables.
Dominio del Análisis Matemático en una variable.

Contenido (breve descripción de la asignatura)

1. Introducción, definiciones, ejemplos, haces de curvas planas.
2. Métodos elementales de integración.
3. Diferenciales exactas y factores integrantes.
4. Aplicaciones a la Física, a la dinámica de poblaciones y a otros campos.
5. Ecuaciones de primer orden sin forma normal o no lineales en y'.
6. Aplicaciones geométricas.
7. Ecuaciones de orden superior, reducción del orden.
8. Existencia y unicidad local de soluciones. (Optativo): Dependencia continua de los datos.
(Optativo): Derivación con respecto a los datos iniciales.

Bibliografía básica:
M. Valdivia, Análisis Matemático III, Tomo I, UNED, Madrid 1998.

Metodología docente: Enseñanza a distancia, metodología de la UNED.
Enseñanza virtualizada.

Tipo de evaluación:
Pruebas Presenciales en el Centro Asociado correspondiente.

Idioma en que se imparte: Español

2.CONTEXTUALIZACIÓN

Esta asignatura es el primer paso en la introducción de los conceptos, herramientas y aplicaciones de las Ecuaciones diferenciales. (Un segundo paso se dará en el segundo semestre con la asignatura "Ecuaciones y sistemas diferenciales lineales").
Las Ecuaciones diferenciales forman, por una parte, una de las grandes subramas del Análisis matemático, con importantes contactos con otras ramas de las Matemáticas, como la Geometría diferencial, la Teoría de variable compleja, la Optimización y el Cálculo de variaciones. Por otro lado, las Ecuaciones diferenciales son una herramienta omnipresente en Física e Ingeniería desde que Galileo y Newton fundaron la Física moderna. En la actualidad también tienen aplicaciones relevantes en Química, Biología y Ciencias sociales.
Esta asignatura es indispensable para poder cursar y entender la asignatura del segundo semestre "Ecuaciones y sistemas diferenciales lineales".
En cuanto a las competencias generales del Master que se comienzan a cubrir con esta asignatura cabe mencionar:
1. Conocimientos generales en uno de los principales campos de las Matemáticas.
2. Saber aplicar los métodos y técnicas matemáticas a diversos problemas de la realidad.
3. Capacidad de manejar la literatura matemática necesaria.
4. Capacidad de comunicación de los resultados (en la evaluación se tendrá en cuenta también la buena redacción de las soluciones a los ejercicios propuestos).

3.REQUISITOS PREVIOS RECOMENDABLES

Se requieren conocimientos básicos de Geometría euclídea, Álgebra Lineal y Análisis Matemático de una y varias variables. De hecho, el Análisis Matemático de una variable se debe dominar ampliamente.

4.RESULTADOS DE APRENDIZAJE

Conocimientos:

1. Conocer el concepto de solución (particular) y de solución general de una ecuación diferencial ordinaria (EDO), así como su interpretación geométrica.
2. Conocer la relación entre una EDO y una familia de curvas planas.
3. Conocer los métodos de resolución de la ecuaciones más comunes que admiten integración elemental.

4. Conocer las funciones hiperbólicas.
5. Conocer que algunas funciones frecuentes no tienen primitiva (o integral) elemental.
6. Tener unas nociones sobre ecuaciones diferenciales sin integración elemental.
7. Conocer de modo básico los métodos de reducción de orden de una ecuación diferencial.
8. Conocer el concepto de sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.
9. Conocer la relación entre una ecuación de orden n y un sistema de ecuaciones.
10. Conocer los teoremas locales de existencia de Peano, y de existencia y unicidad de Picard (con condición de Lipschitz) y (optativamente) de Cauchy (con datos analíticos), tanto para ecuaciones como para sistemas de ecuaciones.
11. (Optativo): Tener unas nociones sobre los teoremas de dependencia continua y diferenciable con respecto a los datos iniciales y parámetros.

Destrezas y habilidades:

1. Aplicar correctamente el concepto de solución de una EDO y calcular su dominio de definición; reconocer y/o calcular la forma normal de una EDO; distinguir entre orden y grado de una EDO.
2. Obtener la EDO que corresponde a una familia de curvas, y viceversa. Calcular las trayectorias ortogonales.
3. Resolver ecuaciones separables, homogéneas, lineales de primer orden, de Bernouilli y ciertos casos de ecuaciones de Riccati.
4. Reconocer e integrar diferenciales exactas. Calcular factores integrantes.
5. Distinguir, con consultas adecuadas, algunas funciones sin primitiva elemental.
6. Reconocer, mediante consultas bibliográficas, ecuaciones diferenciales sin integración elemental.
7. Dibujo aproximado de soluciones de una EDO. Isoclinas, soluciones especiales, máximos y mínimos, convexidad. Dibujo manual y dibujo con ordenador.
8. Resolver algunas ecuaciones de primer orden sin forma normal o no lineales en y'.
9. Plantear y resolver problemas geométricos sobre curvas planas.
10. Aplicar las ecuaciones diferenciales a la Física, a la dinámica de poblaciones y a otros campos.
11. Aplicar los teoremas de existencia de Peano, y de existencia y unicidad de Picard.

Competencias:

1. Abre la posibilidad de cursar la asignatura del segundo semestre "Ecuaciones y sistemas diferenciales lineales" .
2. Aplicar a problemas reales (Física, Ingeniería, Biología y otros campos).
3. Abre la posibilidad de mejorar muy sustancialmente la comprensión de la Física clásica y de la Ingeniería.

5.CONTENIDOS DE LA ASIGNATURA

1. Introducción, definiciones, ejemplos, haces de curvas planas. En primer lugar se estudian los conceptos de Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO), solución [particular] y solución general de una EDO, y forma normal de una EDO, acompañados de ejemplos. A continuación se introduce la expresión $P(x,y)+Q(x,y)=0$. Finalmente se establece la relación entre EDOs de primer orden y familias (o haces) uniparamétricas de curvas planas.
2. Métodos elementales de integración. Unos pocos tipos de EDOs pueden resolverse mediante cálculos elementales. En su mayoría son ecuaciones de primer orden (lineales o no lineales) o bien ecuaciones lineales de orden n. Estas últimas se estudian en la asignatura de ecuaciones lineales del segundo semestre.
En este capítulo se presentan métodos de integración elemental para ecuaciones (de primer orden) separables, homogéneas, lineales, de Bernouilli y ciertos casos de ecuaciones de Riccati.
3. Diferenciales exactas y factores integrantes. Este capítulo usa de forma intensa el Análisis Matemático en varias variables. Se enseña a reconocer las diferenciales exactas y a obtener su solución general en forma implícita mediante el cálculo de la función potencial. Por otra parte, cuando tenemos una diferencial no exacta se busca, si es posible, un factor integrante que la convierta en diferencial exacta.
4. Aplicaciones a la Física, a la dinámica de poblaciones y a otros campos. (Optativo).
En este momento estamos restringidos a ecuaciones diferenciales de primer orden. Podemos considerar movimientos rectilíneos de masas puntuales sometidas a fuerzas de rozamiento que sólo dependan de la velocidad, dinámica de una población con crecimiento exponencial o logístico, desintegración radiactiva, problemas de disoluciones y mezclas, modelos simples sobre la carrera de armamento nuclear, etc.
5. Ecuaciones de primer orden sin forma normal o no lineales en y'. Para estas ecuaciones hemos de tener en cuenta la importante cautela de que, en general, no son aplicables los teoremas de existencia y unicidad del capítulo 8. Son ecuaciones que aparecen con frecuencia en el estudio de las curvas planas. Se tratan la ecuación de Lagrange, la ecuación de Clairaut, ecuaciones resolubles en y o en x, ecuaciones en las que falta la y o la x, y ecuaciones homogéneas. La

ecuación de Clairaut presenta el fenómeno de la existencia de una solución llamada singular, que está relacionada con el concepto de envolvente de una familia uniparamétrica de curvas planas.

6. Aplicaciones geométricas. Aunque la relación entre ecuaciones diferenciales y geometría de curvas impregna toda la asignatura, se concentran en este capítulo aplicaciones geométricas que requieren mayor elaboración, tales como:

Trayectorias ortogonales; curvas de nivel y líneas de máxima pendiente sobre una superficie; familias multiparamétricas de curvas planas; curvas definidas por condiciones sobre la curvatura, la longitud de arco o los volúmenes y áreas de revolución que generan.

7. Ecuaciones de orden superior, reducción del orden. El objetivo es, fundamentalmente, introducir varios métodos sencillos y frecuentes de reducción de orden: i) Ecuaciones que no contienen la variable y, ii) Ecuaciones que no contienen la variable x (llamadas ecuaciones autónomas), y iii) ecuaciones que contienen solamente dos derivadas cuyos órdenes difieren en dos unidades.

8. Existencia y unicidad local de soluciones. Dependencia continua de los datos (optativo). Derivación con respecto a los datos iniciales (optativo). Se plantea el Problema de valor inicial para ecuaciones de primer orden, para ecuaciones de orden n, y para sistemas de ecuaciones diferenciales. Las ecuaciones de orden n se tratan como sistemas de ecuaciones, idea muy importante en diversos aspectos de la teoría de ecuaciones. Se estudian el Teorema de existencia de Peano, el Teorema de existencia y unicidad de Picard y (optativamente) el Teorema de Cauchy con datos analíticos. El Teorema de Picard requiere detenerse en la definición y comprensión de la condición de Lipschitz. El Teorema de Cauchy, que es optativo, necesita repasar o exponer unas nociones de funciones reales analíticas. La palabra "local" hace referencia a que estos teoremas afirman la existencia de solución solamente en un intervalo suficientemente pequeño. A pesar de esta limitación, los teoremas locales tienen mucho interés dentro y fuera de las Matemáticas. Por otra parte, con más hipótesis y desarrollos más laboriosos se obtienen teoremas de existencia "global" (también llamados de prolongación de las soluciones) que en este Master se sitúan en la asignatura de ecuaciones diferenciales del segundo semestre. Por último, (optativamente) se aborda la dependencia continua y diferenciable de la solución con respecto a los datos iniciales, cuestión fundamental en los modelos físicos y en los métodos de cálculo numérico.

6.EQUIPO DOCENTE

DATOS NO DISPONIBLES POR OBSOLESCENCIA

7.METODOLOGÍA

METODOLOGÍA Y ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE

El sistema fundamental de aprendizaje es la lectura y estudio del Texto Base, junto con las Notas de clase escritas por el profesor. El alumno contará además con las tutorías y las preguntas al profesor a través del teléfono, del correo ordinario, del correo electrónico y del curso virtual, así como con la página Web del departamento:
http://www.mat.uned.es .

8.BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

Comentarios y anexos:
Manuel Valdivia Ureña, Análisis Matemático III, Tomo I, UNED, Madrid, 5ª Edición, 1998.

9.BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

Comentarios y anexos:

Textos

M. de Guzmán: Ecuaciones diferenciales ordinarias. Teoría de estabilidad y control. Ed. Alhambra, 1975.

G. Simmons: Ecuaciones diferenciales. Con aplicaciones y notas históricas. Segunda Edición. McGraw-Hill, 1993.

Libros de problemas

F. Ayres: Ecuaciones diferenciales. Serie de Compendios Schaum . McGraw-Hill, 1994.

R. Bronson: Ecuaciones diferenciales. Serie de Compendios Schaum. McGraw-Hill, Diversas ediciones. Última edición: Marzo-2008.
M. de Guzmán, I. Peral, y M. Walias: Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Ed. Alhambra, 1978.
Los problemas recogidos en este libro son esencialmente los que se proponen en el texto de M. de Guzmán.
A. Kiseliov, M. Krasnov, y G: Makarenko: Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Ed. Mir, Moscú, 1984.

Manuales de Matemáticas
I. Bronshtein y K. Semendiaev, Manual de Matemáticas. Editorial Mir, Moscú, 1971.
Se reimprime con frecuencia y suele encontrarse en las librerías españolas.
M.R. Spiegel, J. Liu y L. Abellanas, Fórmulas y tablas de Matemática aplicada. Segunda edición revisada, Schaum, McGraw-Hill Interamericana de España, Madrid, 2005.
Este libro está relacionado con el siguiente, que suele encontrarse en la mayoría de las bibliotecas.
M.R. Spiegel, Manual de fórmulas y tablas matemáticas, Schaum, McGraw-Hill.
Diversas ediciones o reimpresiones a partir de 1970.

Aplicaciones y modelización:
M. Braun, Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones, Grupo Editorial Iberoamérica, original en inglés de 1983.
Frank R. Giordano and Maurice D. Weir, A First Course in Mathematical Modeling, Brooks/Cole Publishing Company, 1985.
William Simon, Mathematical Techniques for Biology and Medicine. Academic Press, New York, 1972. MIT Press, Cambridge, Mass., 1977. Dover, New York, 1986.
Richard Haberman, Mathematical Models: Mechanical Vibrations, Population Dynamics and Traffic Flow, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998.

Caos y fractales:
Edward Beltrami, Mathematics for Dynamic Modeling, Academic Press, 1987.
Cristoforo S. Bertuglia and Franco Vaio, Nonlinearity, Chaos and Complexity: The Dynamics of Natural and Social Sciences, Oxford University Press, New York, 2005.
Robert L. Devaney and Linda Keen, Chaos and Fractals: The Mathematics Behind the Computer Graphics, American Mathematical Society, 1989.
James Gleick, Chaos, Making a New Science, Penguin Group, 1987.

10.RECURSOS DE APOYO AL ESTUDIO

1. Curso virtual donde se encuentran materiales de apoyo al estudio, acceso al foro y correos electrónicos de profesores y alumnos.
2. Página Web del departamento http://www.mat.uned.es .
3. Laboratorios informáticos para el uso de programas de apoyo al estudio si están disponibles.
4. Notas explicativas del profesor, en formatos PDF, HTML, DOC, ZIP, visibles en el curso virtual y en la página Web del departamento. Por ejemplo:

Nota 8. Ecuaciones diferenciales sin integración elemental.

11.TUTORIZACIÓN Y SEGUIMIENTO

En primer lugar están los foros y los medios de comunicación de la virtualización de la asignatura, así como la página Web del departamento http://www.mat.uned.es .

La tutorización presencial y telefónica se lleva a cabo los Jueves de 15:30 a 19:30 horas, en el despacho 126a de la Facultad de Ciencias. Tel.: 91 398 84 73, e-mail:
fbernis@mat.uned.es

12.EVALUACIÓN DE LOS APRENDIZAJES

La evaluación se llevará a cabo mediante una prueba presencial de dos horas de duración.
La prueba constará de cinco preguntas: cuatro prácticas y una teórica. No se exigirá la repetición de demostraciones del Texto. Serán aceptados en igualdad de condiciones todos los métodos de resolución, estén o no en el programa, si dichos métodos son correctos y están correctamente aplicados.

CRITERIOS GENERALES PARA LA EVALUACIÓN FINAL

Se valorará, esencialmente, el grado de comprensión de la materia y el planteamiento razonado de los problemas. También se valorará la buena exposición.

13.COLABORADORES DOCENTES

Véase equipo docente.

14.Plan de trabajo detallado

PLAN DE TRABAJO DETALLADO

Los Capítulos de esta Guía Didáctica corresponden a uno o más Temas del Texto Base.
Para especificar un Tema necesitamos indicar su número (romano) y su Unidad Didáctica.

Capítulo 1. Introducción, definiciones, ejemplos, haces de curvas planas. (Tema I , Unidad Didáctica 1).
1.1. Definiciones. Ejemplos.
1.2. Interpretación geométrica. Curvas integrales.
1.3. Ecuación diferencial de un haz de curvas planas.

Errata: En la última fórmula de la p. 31 debe decir x' = - Q/P en vez de x' = Q/P .

Ejemplos recomendados: Todos.
Ejercicios recomendados: Los ejercicios de autocomprobación con soluciones (todos).

Capítulo 2. Métodos elementales de integración. (Temas II y III , Unidad Didáctica 1).
2.1. Ecuaciones de variables separadas.
2.2. Ecuaciones homogéneas.
2.3. Ecuaciones reducibles a homogéneas.
3.1. Ecuación lineal de primer orden.
3.2. Ecuación de Bernouilli.
3.3. Ecuación de Riccati.

Errata: Repetida varias veces: Debe decir Riccati en vez de Ricati.

Ejemplos recomendados: Todos.
Ejercicios recomendados:
Tema II: Ejercicios de autocomprobación con soluciones 1, 2, 4, 10 (variables separadas); 11, 13, 18, 19 (homogéneas); 23, 24 (homogéneas modificadas).
Tema III: Ejercicios de autocomprobación con soluciones 1, 2, 3, 4, 5 (lineales); 10, 11, 12, 13 (Bernouilli); 20 (Riccati).

Capítulo 3. Diferenciales exactas y factores integrantes. (Temas IV, V y VI , Unidad Didáctica 1).
4.1. Condición necesaria para que una ecuación sea diferencial exacta.
4.2. Condición suficiente para que una ecuación sea diferencial exacta.
5.1. Integración de ecuaciones diferenciales exactas.
5.2. Factores integrantes.
6.1. Cociente de factores integrantes.
6.2. Diversos tipos de factores integrantes.

Ejemplos recomendados: Todos.
Ejercicios recomendados:

Tema IV: Ejercicios de autocomprobación con soluciones 1, 2, 3, 4.
Tema V: Ejercicios de autocomprobación con soluciones 1, 2, 3, 4, 5.
Tema VI: Ejercicios de autocomprobación con soluciones 1, 2, 3, 4, 5.

Notas explicativas del profesor:
Nota 1. Ejemplo con dos factores integrantes independientes - Cociente de factores integrantes, p. 160 del Texto
Nota 2. Funciones sin integral elemental: Ejemplos y recomendaciones prácticas
Nota 3. Funciones hiperbólicas - Aplicaciones a las ecuaciones diferenciales

Capítulo 4. Aplicaciones a la Física, a la dinámica de poblaciones y a otros campos.
(Optativo): Se toman unos 10 ejemplos sencillos, distribuidos a lo largo del curso, de los siguientes textos:
M. Braun, Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones, Grupo Editorial Iberoamérica, original en inglés de 1983.
Frank R. Giordano and Maurice D. Weir, A First Course in Mathematical Modeling, Brooks/Cole Publishing Company, 1985.
William Simon, Mathematical Techniques for Biology and Medicine. Academic Press, New York, 1972. MIT Press, Cambridge, Mass., 1977. Dover, New York, 1986.
Richard Haberman, Mathematical Models: Mechanical Vibrations, Population Dynamics and Traffic Flow, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998.

Capítulo 5. Ecuaciones de primer orden sin forma normal o no lineales en y'. (Temas I, II, Unidad Didáctica 2).
1.1. Ecuación de Lagrange.
1.2. Ecuación de Clairaut.
2.1. Ecuaciones en las que falta la x o la y.
2.2. Ecuaciones homogéneas.

Ejemplos recomendados: Todos.
Ejercicios recomendados:
Tema I: Ejercicios de autocomprobación con soluciones 1, 2, 3, 7, 8, 10 (Lagrange); 11, 12, 13, 14 (Clairaut).
Tema II: Ejercicios de autocomprobación con soluciones 1, 4 (falta la y); 6, 9 (falta la x); 11 (homogénea).

Notas explicativas del profesor:
Nota 4. Envolvente y solución singular

Capítulo 6. Aplicaciones geométricas. (Temas III y VI, Unidad Didáctica 2).
3.1. Problemas de trayectorias.
3.2. Curvas de nivel y líneas de máxima pendiente sobre una superficie.
6. Problemas geométricos de ecuaciones diferenciales.

Ejemplos recomendados: Todos.
Ejercicios recomendados:
Tema III: Ejercicios de autocomprobación con soluciones 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Tema VI: Todos los ejercicios.

Capítulo 7. Ecuaciones de orden superior, reducción del orden. (Temas IV, Unidad Didáctica 2; Tema V excluido del programa).
4.1. Ecuaciones que no contienen la variable y.
4.2. Ecuaciones que no contienen la variable x (llamadas ecuaciones autónomas).
4.3. Ecuaciones que contienen solamente dos derivadas cuyos órdenes difieren en dos unidades. (Ejemplo básico: vibraciones sin rozamiento).

Ejemplos recomendados: Todos.

Ejercicios recomendados:

Tema IV: Ejercicios de autocomprobación con soluciones 3, 5, 6, 8.

Notas explicativas del profesor:

Nota 5. Rebajar el orden en una ecuación autónoma - Funciones hiperbólicas

Nota 6. (Optativa) Ecuaciones que no contienen la variable x - Cambio de variable pág. 264, Texto Base, Tomo I

Capítulo 8. Existencia y unicidad local de soluciones. (Optativo): Dependencia y derivación con respecto a los datos iniciales. (Unidad Didáctica 3, sólo las siguientes secciones y en el sentido explicado a continuación).

1.3. Teorema de existencia de Peano (ecuaciones de primer orden).

2.1. Método de Picard (ecuaciones de primer orden).

2.3. (Optativo): Teorema de Cauchy (analiticidad, ecuaciones de primer orden).

3.1. Ecuaciones diferenciales de orden superior y sus sistemas.

3.2. Teorema de existencia de Peano (sistemas de ecuaciones).

4.1. Método de Picard (sistemas de ecuaciones).

4.3. (Optativo): Teorema de Cauchy (analiticidad, sistemas de ecuaciones).

5. (Optativo): Dependencia de los datos.

6. (Optativo): Derivación con respecto a los datos iniciales.

Se exigen las Secciones no optativas recién enumeradas, pero sólo en el sentido siguiente:

i) Hay que conocer, entender y saber aplicar el Teorema de existencia de Peano y el Teorema de existencia y unicidad de Picard, ambos para ecuaciones y para sistemas de ecuaciones.

ii) Saber transformar ecuaciones de orden superior en sistemas (Sección 3.1).

Es necesario estudiar las siguientes notas explicativas del profesor:

Nota 7. Teoremas de existencia, unicidad y dependencia continua: errores frecuentes y otros comentarios

Nota 8. (= Nota 7) Ecuaciones diferenciales sin integración elemental

Nota 9. Respuesta a un alumno hipotético: aclaraciones básicas

Nota 10. La condición de Lipschitz del Teorema de Picard: Ejemplos

La Nota 10 da condiciones suficientes muy sencillas que no están incluidas en el Texto Base. Es importante porque la mayoría de los alumnos tienen grandes dificultades para aplicar la definición de condición de Lipschitz directamente.