ASIGNATURA DE MÁSTER:

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO NUMÉRICO

Curso 2009/2010

(Código:21152044)

1.PRESENTACIÓN

Los métodos numéricos permiten realizar el cálculo aproximado de soluciones en muchos problemas matemáticos. Este curso pretende que el alumno complete los conocimientos de Álgebra y Cálculo Diferencial e Integral con conceptos y procedimientos que le permitan de un modo efectivo alcanzar la solución de problemas que en estos ámbitos se plantean. Estas técnicas se basan en procedimientos que consideran aspectos del cálculo que surgen en aplicaciones de las Matemáticas al mundo real y que se ajustan a los medios actuales de cálculo automático digital. En este sentido, los métodos del Álgebra Lineal se revisan considerando sus aspectos algorítmicos y las dificultades que surgen en el cálculo con matrices de dimensión elevada.

La teoría de la Interpolación permitirá la resolución de problemas cuyo análisis matemático puede ser establecido pero para los cuales la solución analítica no es posible determinar o encierra gran complejidad. Las técnicas interpolatorias permitirán al alumno mediante cálculos algebraicos determinar el valor de las derivadas e integrales de funciones que no son elementales.

2.CONTEXTUALIZACIÓN

Este curso pone en contacto al alumno con las herramientas para el cálculo efectivo de soluciones a problemas que en otras materias han sido analizados y cuya estructura matemática han perfectamente comprendido. Con esta materia, deberá comprender que en muchas situaciones aunque el problema en estudio tenga asegurada su solución y se conozca cualitativamente, es preciso utilizar herramientas matemáticas que permitan su cuantificación.

Por otra parte, no es posible desligar el aprendizaje de las técnicas numéricas del manejo de los instrumentos de cálculo automático que permiten su verdadera puesta en práctica en situaciones que no sean deliberadamente simples. La aplicación de los algoritmos numéricos en entornos de cálculo automático es esencial para la perfecta comprensión del alumno de la metodología del Cálculo Numérico.

3.REQUISITOS PREVIOS RECOMENDABLES

Se considera imprescindible para el estudio de esta asignatura que el alumno haya superado los cursos de cálculo diferencial e integral (en una y varias variables) y de álgebra lineal (aplicaciones lineales y autovalores).

4.RESULTADOS DE APRENDIZAJE

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Conocimientos:

1. Errores y estabilidad en un algoritmo numérico.
2. Resolución de sistemas lineales de gran talla.
3. Aproximación de autovalores matriciales.
4. Aproximación de funciones.
5. Interpolación de funciones.
6. Cuadratura numérica.

Destrezas:

1. Experimentar con errores e inestabilidades en el cálculo.
2. Desarrollar capacidades para resolver problemas reales mediante modelos matemáticos, que incluyan cálculos de gran talla y que consecuentemente requieran el uso de computadores.
3. Adquirir de manera rigurosa los conceptos matemáticos de aproximación de funciones, familiarizándose con sus métodos.
4. Adquirir soltura en la aplicación de los procedimientos estudiados a situaciones prácticas con la ayuda de computadores.

Competencias:

1. Para una aplicación real dada, ser capaz analizar el modelo matemático propuesto, estudiar su estructura, proponer métodos numéricos que puedan proporcionar una solución aproximada a los problemas que sobre los modelos se planteen. Es importante que el alumno logre abstraerse de la "situación real" al modelo teórico y así extraer sus principales propiedades. Tras ello, ser capaz de regresar del modelo a la aplicación real, y evaluar las consecuencias prácticas de las aproximaciones obtenidas.
2. Adquirir las competencias necesarias que permitan abordar las asignaturas posteriores de este máster que requieren conocimientos Análisis Numérico.

5.CONTENIDOS DE LA ASIGNATURA

CONTENIDOS DE LA ASIGNATURA

1. Errores y estabilidad en el cálculo. La presencia inevitable de errores en el cálculo automático, debido al uso de aritméticas de precisión finita, puede deteriorar los resultados de un cálculo. Además, estos errores pueden incrementarse considerablemente si el procedimiento seguido en el cálculo es inestable. En este capítulo se estudiarían las llamadas aritméticas de punto flotante y los errores de redondeo y truncamiento que implica su uso. Se introduce el concepto de estabilidad ilustrándolo con numerosos ejemplos que muestren situaciones en las que los resultados pueden resultar afectados por los errores numéricos.

2. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Algunos de los métodos elementales de resolución de sistemas de ecuaciones lineales pueden resultar ineficaces cuando el número de incógnitas y ecuaciones crece considerablemente. Por el contrario, el método de eliminación de Gauss y sus modificaciones son eficientes en estas situaciones. Este capítulo está dedicado al estudio de estos métodos y de su puesta en práctica en un computador. Además, se estudian algunos conceptos relacionados con la estabilidad de los sistemas lineales tales como el número de condición de una matriz.

3. Aproximación de autovalores y vectores propios. La triangulación y diagonalización de matrices es conceptualmente una materia relevante cuyo conocimiento puede ser utilizado en otras disciplinas. El principal propósito de este capítulo es el estudio de técnicas eficientes para llevar a cabo estos cálculos cuando la dimensión de las matrices no sea reducida.

4. Aproximación de funciones. Existen muchas situaciones en las que resulta necesario aproximar una función por una más adecuada para el cálculo. Con frecuencia polinomios ortogonales y polinomios de interpolación son utilizados para este fin. En un primer bloque se estudian generalidades sobre las técnicas de aproximación y en particular, los polinomios ortogonales clásicos. En un segundo bloque se estudian distintos tipos de interpolación elementales tales como la de

Lagrange, Hermite y por esplines. Las diferencias divididas y los polinomios básicos forman parte de estos conocimientos junto con los algoritmos que permiten su aplicación práctica

4. Integración numérica. Los conceptos y técnicas de aproximación tienen como primera aplicación el diseño de técnicas de derivación e integración numérica. La idea básica es sustituir una función que tiene que ser integrada por un polinomio que la aproxima. Se haría mucho énfasis en las técnicas de cuadratura numérica basadas en los métodos de interpolación.

6.EQUIPO DOCENTE

DATOS NO DISPONIBLES POR OBSOLESCENCIA

7.METODOLOGÍA

PLAN DE TRABAJO DE LOS ALUMNOS

Aspectos generales

El estudio de cada capítulo debe ser abordado siguiendo las siguientes etapas de estudio:

· El objetivo de la primera fase es la comprensión de los conceptos matemáticos que aparecen en este capítulo. No es necesario que el alumno alcance una perfecta compresión de ellos ya que se trata de conseguir captar sus aspectos esenciales. Puede resultar eficiente que anote las dificultades especiales que haya sufrido en la primera lectura para volver sobre ellas en una etapa posterior.

Con una comprensión inicial de estos conceptos el alumno estará en condiciones de estudiar las técnicas o procedimientos de cálculo que forman parte del contenido del capítulo. Sería conveniente que el alumno diseñara en papel, esquemas de estos procedimientos tratando de destacar en ellos las etapas fundamentales del método pensando en su posterior aplicación práctica.

· El objetivo de la segunda fase es la resolución de problemas, usando los algoritmos estudiados, con ayuda de un ordenador. Algunos ejemplos prácticos estarán disponibles en las notas del curso, en la bibliografía recomendada o en las páginas del curso virtual y servirán como aplicación práctica. Algunos procedimientos sencillos puede ser puestos en práctica mediante hojas de cálculo cuyo manejo el alumno debería conocer o que en otro caso podría aprender mediante alguna actividad complementaria en el curso virtual. Para problemas más complejos podría utilizar alguno de los entornos de cálculo científico (MatLab, Mathematica, Maple y otros) que pueda manejar. Deberá utilzar el foro y la tutoría si hay algún punto en que tiene especial dificultad de comprensión.

· El objetivo de la tercera fase es la realización de ejercicios de naturaleza más conceptual y la profundización en la comprensión de conceptos y procedimientos que constituyen la materia de este capítulo.

· Finalmente se propondrá la realización de una prueba a distancia, de este modo se puede tener una opinión final sobre si el estudio realizado ha sido o no satisfactorio, antes de la evaluación final presencial. En caso necesario deberá volver sobre los puntos débiles.

ORIENTACIONES PARA SEGUIR EL PLAN DE TRABAJO.

Capítulo 1. Errores y estabilidad en el cálculo.

1. Representación de números en un computador.

2. Aritméticas finitas.

3. Estabilidad y algoritmos numéricos.

· Objetivo fundamental: Estudio de los errores en el cálculo numérico. El concepto más importante del capítulo es la estabilidad de un algoritmo.

1. Conceptos más importantes y que deben ser estudiados con profundidad en la segunda lectura: Aritmética finita, error de redondeo y truncamiento. Estabilidad

Sección 1:

· Necesidad de aproximar un número real por un número maquina de un modo que depende del sistema de representación utilizado.

· Representación en punto flotante.

Sección 2:

· Errores de redondeo y truncamiento.

· Operaciones aritméticas realizadas en punto flotante.

Sección 3:

· Concepto de estabilidad algorítmica.

· Ejemplos de problemas y algoritmos inestables.

Ejemplos y prácticas con un computador recomendados:

Ejemplos de algoritmos que muestren comportamientos inestables.

Capítulo 2. Sistemas de ecuaciones lineales

1. Normas matriciales

2. Estabilidad de un sistema de ecuaciones. Número de condición de una matriz.

3. Método de eliminación de Gauss. Estrategias de pivote parcial. Factorización LU de una matriz.

4. Métodos especiales para matrices simétricas.

5. Métodos iterativos. Análisis de la convergencia de los métodos iterativos.

· Objetivo fundamental: Resolución de sistemas de ecuaciones de ecuaciones lineales. Estudio de la estabilidad de los sistemas y de los algoritmos de resolución. Descripción de la puesta en práctica de los métodos directos e iterativos. Análisis de la convergencia de los métodos iterativos.

Resultados más importantes y que deben ser estudiados con profundidad en la segunda lectura: Matriz mal condicionada, Factorización de una matriz, algoritmos iterativos de Jacobi, Gauss-Seidel y Relajación.

Sección 1:

· Concepto de norma matricial subordinada a una norma vectorial.

Sección 2:

· Mal condicionamiento de sistemas de ecuaciones lineales.

· Ejemplos de matrices clásicas mal condicionadas.

Sección 3:

· Método de eliminación de Gauss. Organización matricial de los cálculos. Estrategis de pivote total y parcial. Concepto de densidad matricial y técnicas especiales para matrices dispersas.

Sección 4:

· Las factorizaciones especiales para matrices simétricas. La factorización de Cholesky.

Sección 5:

· Método de Jacobi.

· Método de Gauss-Seidel

· Métodos de relajación.

· Análisis de la convergencia de los métodos iterativos.

Capítulo 3. Aproximación de autovalores y vectores propios.

1. Teorema de Cayley-Hamilton. Invariantes de una transformación lineal. Matriz de compañía.
2. Métodos de cálculo del polinomio característico.
3. Cálculo de autovalores dominantes. Método de la potencia.
4. Métodos basados en transformaciones de la matriz. Algoritmo QR.

· Objetivo fundamental: Se trata de motivar y desarrollar algoritmos de cálculo eficiente de los autovalores de una matriz.

Resultados más importantes y que deben ser estudiados con profundidad en la segunda lectura: Aunque el problema del cálculo de los autovalores de una matriz está relacionado con la resolución de ecuaciones no-lineales y en este sentido debe ser motivo de estudio en otra asignatura dedicada exclusivamente a estas cuestiones, en este capítulo se estudian únicamente métodos que están basados en técnicas del Algebra Lineal.

Sección 1:

· Definiciones de autovalor y vector propio.

· Definición de polinomio característico. Enunciado del teorema de Cayley-Hamilton.

· Relación entre polinomios característicos y matrices de compañía.

Sección 2:

· Métodos basados directamente en el teorema de Cayley-Hamilton: Método de Krilov.

· Métodos de Leverrier.

Sección 3:

· Método de la potencia iterada.

· Cálculo de vectores propios asociados al autovalor dominante.

Sección 4:

· Proyecciones y simetrías espacio euclídeo. Transformaciones de Householder.

· Métodos de Householder.

Capítulo 4. Aproximación de funciones.

1. Concepto de mejor aproximación. Aproximación uniforme.
2. Aproximación en L^2. Polinomios ortogonales.
3. Interpolación y ajuste. Interpolación de Lagrange.
4. Polinomios básicos de Lagrange y diferencias divididas.
5. Interpolación de Hermite. Esplines
6. Extensión al caso de funciones de varias variables.

· Objetivos fundamentales: La comprensión del concepto de aproximación de una función mediante polinomios u otras funciones que sean evaluables de un modo simple. El adiestramiento en técnicas que permitan el cálculo efectivo de estas aproximaciones y particularmente el desarrollo de técnicas de interpolación.

Resultados más importantes y que deben ser estudiados con profundidad en la segunda lectura:

Sección 1:

· Mejor aproximación en una norma dada, mediante polinomios. Aproximación con la norma del máximo.

Sección 2:

· Polinomios ortogonales clásicos. Fórmulas de recurrencia.

Sección 3:

· Aproximación por mínimos cuadrados. Ajuste mediante polinomios.

· Resultados de existencia y unicidad en los problemas de interpolación.

· Interpolación de Lagrange. Determinante de Vandermonde.

Sección 4:

· Polinomios básicos de Lagrange.

· Exactitud y error en la interpolación de Lagrange.

· Construcción del polinomio de Lagrange

Sección 5:

· Interpolación usando valores de la función y de sus derivadas. Interpolación de Hermite

· Concepto de esplín.

· Esplines cúbicos.

Sección 6:

- Interpolación de Lagrange en un triángulo.
- Interpolación de Lagrange en un rectángulo.

Capítulo 5. Integración numérica

1. Derivación e integración numérica basadas en técnicas de interpolación.

2. Fórmulas de Newton-Cotes.

3. Análisis del error de cuadratura.

4. Fórmulas compuestas.

5. Fórmulas de cuadratura de Gauss.

· Objetivos fundamentales: Estudio de las técnicas de integración aproximada (cuadratura numérica) mediante las fórmulas que derivan de sustituir el integrando por una función polinómica.

Resultados más importantes y que deben ser estudiados con profundidad en la segunda lectura:

Sección 1:

· Construcción de una fórmula de derivación o cuadratura usando un polinomio de interpolación.

Sección 2:

· Fórmulas cerradas de Newton-Cotes.

· Fórmulas abiertas de Newton-Cotes.

Sección 3:

· Estimaciones del error.

Sección 4:

· Construcción de fórmulas compuestas.

· Análisis del error.

Sección 5:

· Raíces de los polinomios ortogonales.

· Cuadratura de Gauss.

· Análisis del error.

8.BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

ISBN(13): 9788436221183
Título: CÁLCULO NUMÉRICO I (6ª)
Autor/es: Gasca González, Mariano ;
Editorial: UNED

Buscarlo en libreria virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Buscarlo en Catálogo del Patrimonio Bibliográfico

9.BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

Comentarios y anexos:

Otros libros básicos de teoría son:

Gasca, M. *Cálculo Numérico I* . Unidades Didácticas UNED.

Doubova, A., Guillen, F (2007). *Un curso de Cálculo Numérico*. Universidad de Sevilla.

Bourden , L.R., Faires, J.D. (2003). *Análisis Numérico*. Thomson International.

Kincaid, D., Cheney, W., (1994). *Análisis Numérico.* Addison-Wesley Iberoamericana.

Stoer, J., Bulirsh, R., (1980). *Introduction to Numerical Analysis*, Springer.

Libros disponibles en la red Internet son http://es.wikipedia.org/wiki/An%C3%A1lisis_num%C3%A9rico

http://en.wikibooks.org/wiki/Numerical_Methods

10.RECURSOS DE APOYO AL ESTUDIO

Doubova, A., Guillen, F (2007). *Un curso de Cálculo Numérico*. Universidad de Sevilla.

Bourden , L.R., Faires, J.D. (2003). *Análisis Numérico*. Thomson International.

Kincaid, D., Cheney, W., (1994). *Análisis Numérico.* Addison-Wesley Iberoamericana.

Stoer, J., Bulirsh, R., (1980). *Introduction to Numerical Analysis*, Springer.

Libros disponibles en la red Internet son

http://es.wikipedia.org/wiki/An%C3%A1lisis_num%C3%A9rico

http://en.wikibooks.org/wiki/Numerical_Methods

11.TUTORIZACIÓN Y SEGUIMIENTO

En primer lugar están los foros y los medios de comunicación de la virtualización de la asignatura. A través de ellos, el alumno recibirá información actualizada sobre la asignatura y podrá solicitar información o resolución de las dudas que pudieran tener sobre la materia o sobre la organización de la enseñanza.

La tutorización presencial y telefónica se lleva a cabo los lunes de 16 a 20 horas, en el despacho 116 de la Facultad de Ciencias.

Tel.: 91 398 72 57, e-mail: cmoreno@ccia.uned.es

12.EVALUACIÓN DE LOS APRENDIZAJES

EVALUACIÓN DE LOS APRENDIZAJES

La evaluación se llevará a cabo mediante una prueba presencial de dos horas de duración.La prueba constará de varios ejercicios prácticos y alguna cuestión teórica. Los ejercicios prácticos serán parecidos a los ejemplos y ejercicios de los libros de la bibliografía básica.

CRITERIOS GENERALES PARA LA EVALUACIÓN FINAL

En todos los ejercicios se valorará, esencialmente, el grado de comprensión de la materia y el planteamiento razonado del problema. También se valorará la buena exposición y la eficiencia en la realización de los cálculos dando una gran importancia a la verificación y validación de resultados.

13.COLABORADORES DOCENTES

Véase equipo docente.

14.Notas del curso

En los primeros días del curso académico, estarán disponibles en el curso virtual unas Notas del Curso que cubrirán las materias descritas en los Contenidos. Redactadas para facilitar el autoaprendizaje, contendrán consideraciones teóricas y ejercicios relativos a todos los temas que constituyen el programa de la asignatura.