

PROCESOS ESTOCÁSTICOS. INTRODUCCIÓN A LOS MODELOS FINANCIEROS

Curso 2009/2010

(Código: 2115228-)

1. PRESENTACIÓN

La asignatura "Procesos Estocásticos e Introducción a los Modelos Financieros" se imparte en el tercer semestre –en el Módulo II, de formación– del Máster en Matemáticas Avanzadas. Tiene asignados 7,5 créditos ECTS, pertenece a la especialidad de "Estadística e Investigación Operativa" del máster, y está adscrita al Departamento de Estadística, Investigación Operativa y Cálculo Numérico de la UNED.

Esta guía del curso contiene toda la información relevante sobre esta asignatura (prerrequisitos, temario, metodología, objetivos de aprendizaje, etc.).

2. CONTEXTUALIZACIÓN

Esta asignatura es la continuación de la asignatura "Cálculo de Probabilidades" que se imparte en el Módulo I de este máster. Estas dos asignaturas son, además, las dos únicas del máster que estudian específicamente temas de probabilidad.

El cálculo de probabilidades es una de las ramas principales de las matemáticas que combina, además, el aspecto teórico, que requiere un importante rigor matemático, y el práctico, de gran relevancia en las ciencias aplicadas. Es un campo de investigación muy activo en temas, por ejemplo, como la estadística y el análisis de datos –que son objeto de otras asignaturas de este máster–, la modelación de fenómenos aleatorios y la matemática financiera. Es en estos dos últimos aspectos en los que incide esta asignatura: se estudiarán modelos de sistemas dinámicos aleatorios y algunas de sus aplicaciones en finanzas.

Todas las competencias generales del máster se adquieren, parcialmente, con esta asignatura. Más concretamente:

- Conocimientos generales avanzados de una de las principales áreas de las matemáticas;
- Saber aplicar técnicas y métodos matemáticos a diversos problemas de la realidad;
- Capacidad de enfrentarse con literatura científica en varios niveles;
- Capacidad de comunicación de resultados en entornos especializados;
- Iniciación a la adquisición de la competencia científica suficiente para la incorporación a estudios de doctorado.

3. REQUISITOS PREVIOS RECOMENDABLES

Para cursar esta asignatura, el alumno debe tener conocimientos avanzados de cálculo de probabilidades. Además, sería conveniente aunque no imprescindible que tuviese alguna noción previa de procesos estocásticos como, por ejemplo, cadenas de Markov en tiempo discreto y procesos en tiempo continuo (en general, estos conocimientos se habrán adquirido en los últimos cursos de un grado o licenciatura en matemáticas). Se requieren, además, conocimientos previos de análisis real en una y varias variables, y de ecuaciones diferenciales ordinarias.



4.RESULTADOS DE APRENDIZAJE

Los objetivos de aprendizaje de esta asignatura son los siguientes.

Conocimientos.

- Cadenas de Markov. Martingalas en tiempo discreto y en tiempo continuo. Problema de parada óptima.
- Movimiento browniano. Cálculo estocástico de Itô. Ecuaciones diferenciales estocásticas.
- Nociones básicas de finanzas: arbitraje, estrategias de inversión, opciones europeas y americanas. Modelo de Black-Scholes. Modelos de tipos de interés.

Destrezas.

- Plantear correctamente un modelo dinámico estocástico a partir de una descripción cualitativa.
- Demostrar de manera rigurosa las propiedades teóricas de los procesos estocásticos, proporcionando una interpretación de estas propiedades.
- Fomentar la visión intuitiva del modelado de los procesos estocásticos.
- Familiarizarse con los modelos financieros más comunes y extraer conclusiones de su estudio.

Competencias.

- Dado un modelo dinámico estocástico "real", ser capaz de proponer un modelo teórico de proceso estocástico que se ajuste a esta dinámica. Saber hacer un análisis teórico de sus principales propiedades y, por último, sacar conclusiones de tipo práctico del modelo estudiado.
- Adquirir las competencias necesarias para la realización del trabajo fin de máster.
- Ser capaz de abordar textos científicos de un nivel elevado (en particular, artículos de revistas especializadas), e ir adquiriendo competencias de investigación en matemáticas.

5.CONTENIDOS DE LA ASIGNATURA

La asignatura se divide en cuatro temas: el primero estudia algunos modelos en tiempo discreto y sus aplicaciones en finanzas; los otros tres bloques estudian modelos en tiempo continuo.

Tema 1

Contiene una introducción a los conceptos básicos de los modelos financieros: precios de activos, estrategias de inversión, opciones "call" y "put", y su valoración, arbitraje, etc. El marco teórico para estudiar estos modelos, en este primer bloque, son procesos y martingalas en tiempo discreto. Se hace un estudio detallado del problema de parada óptima en tiempo discreto y su aplicación a las opciones americanas.

Indicaciones: El material básico para el estudio de este tema son los capítulos 1 y 2 del texto básico [1] (véase la bibliografía de la asignatura). No obstante, un primer contacto con el tema de los modelos financieros estocásticos puede adquirirse en el documento [6]. También puede consultarse la referencia [5]. Una herramienta básica para el estudio de las martingalas y sus aplicaciones financieras es la noción de esperanza condicionada. El texto básico [1] contiene un apéndice sobre esta cuestión y una exposición similar y alternativa es el documento [7].

Tema 2

En este tema se estudia el proceso estocástico continuo más relevante: el movimiento browniano. Se dan dos definiciones equivalentes del movimiento browniano: mediante sus distribuciones y la definición axiomática. Se estudiarán, entre otras propiedades, la continuidad y no derivabilidad de sus trayectorias, su variación cuadrática, y el principio de reflexión para determinar la distribución del máximo.

Indicaciones: El texto básico [1] se limita a una definición muy sucinta del movimiento browniano, que está en la base de la mayoría de los modelos estocástico financieros. Sin duda es necesario un conocimiento más detallado de este tema, que



puede adquirirse mediante la referencia básica [2].

Tema 3

Este tema se dedica al cálculo estocástico. Se define la integral de Itô: la integral de un proceso estocástico respecto del movimiento browniano. Esta definición se hace primero para procesos llamados elementales, y luego es extendida a procesos más generales. Se establecen la isometría de Itô y las propiedades más relevantes de esta integral estocástica. Se estudian teoremas de existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas y la fórmula de Itô.

Este tema se dedica al cálculo estocástico. Se define la integral de Itô: la integral de un proceso estocástico respecto del movimiento browniano. Esta definición se hace primero para procesos llamados elementales, y luego es extendida a procesos más generales. Se establecen la isometría de Itô y las propiedades más relevantes de esta integral estocástica. Se estudian teoremas de existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas y la fórmula de Itô.

Indicaciones: El capítulo 3 del texto básico [1] contiene una introducción suficientemente detallada de los conceptos introducidos en este tema. Algunas de las demostraciones no incluidas en dicho texto pueden encontrarse en el texto de Øksendal [4] o en las referencias citadas en [1].

Tema 4

Por último, se aborda el estudio de modelos financieros en tiempo continuo. Se introduce el concepto de estrategia de inversión y, para el modelo del movimiento browniano geométrico, se estudia la valoración de una opción europea, deduciéndose la fórmula de Black-Scholes. Se estudian también algunos modelos de tipos de interés, de valoración del bono de cupón cero y de opciones sobre estos bonos.

Indicaciones: Los capítulos 4 y 6 del texto básico [1] constituyen el material para este tema. Se puede consultar el texto de la bibliografía complementaria [3].

6.EQUIPO DOCENTE

DATOS NO DISPONIBLES POR OBSOLESCENCIA

7.METODOLOGÍA

La metodología de aprendizaje consiste en el estudio de los capítulos 1, 2, 3, 4 y 6 del texto de básico [1], para los temas 1, 3 y 4 de esta asignatura, y el estudio del texto básico [2] para el tema 2 de esta asignatura. En este material básico propuesto, se desarrollan de manera muy clara, pedagógica y amena todos los contenidos del programa de la asignatura.

Nótese que el texto [1] está escrito en inglés. Esto ayudará al alumno a familiarizarse con textos científicos en inglés puesto que, ya sea para la realización del trabajo fin de máster, para proseguir con los cursos de doctorado, o en sus posteriores investigaciones, todo el material bibliográfico que encontrará estará escrito en inglés.

El aprendizaje debe articularse en tres etapas principales (que son simultáneas a lo largo del estudio). La primera consiste en la comprensión de todos los resultados teóricos (esto es, la asimilación e interpretación de los teoremas) y su manejo con soltura. La segunda etapa consiste en la comprensión, si no detallada, al menos intuitiva, de las demostraciones de dichos resultados. Para esta etapa, en algunas ocasiones, el alumno deberá recurrir a la bibliografía complementaria propuesta. La tercera etapa es la realización de ejercicios y problemas.

El texto básico [1] propone numerosos ejercicios, con un progresivo nivel de dificultad. Además, el alumno contará con material de evaluación continua, proporcionado por el equipo docente. Este material consistirá en una selección de problemas sobre los cuatro temas de que consta esta asignatura. El alumno deberá resolver estos problemas de manera razonada y detallada (véase el apartado "Evaluación de los aprendizajes").

Finalmente, dentro del curso virtual de la asignatura, el alumno podrá hacer consultas directas al equipo docente, así como compartir sus progresos y dudas con sus otros compañeros.

De las 187.5 horas de que consta la asignatura (correspondientes a los 7.5 créditos ECTS), se recomienda que se dediquen



130 al trabajo autónomo (aproximadamente 80 horas de estudio teórico y 50 horas de resolución ejercicios), y que 57.5 se dediquen a otras actividades, incluyendo las tareas de evaluación continua, la participación en el curso virtual y el trabajo en grupo.

8.BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

Comentarios y anexos:

[1] Lamberton, D., Lapeyre, B. (2008). *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*. Segunda edición. Chapman & Hall.

[2] Vélez, R. *Introducción al Movimiento Browniano*. Departamento de Estadística, Investigación Operativa y Cálculo Numérico. UNED. (Estará disponible en el curso virtual.)

9.BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

Comentarios y anexos:

[3] Etheridge, A. (2002). *A Course in Financial Calculus*. Cambridge University Press.

[4] Øksendal, B. (2003). *Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications*. Sexta edición. Springer.

[5] Ross, S.M. (2005). *An Elementary Introduction to Mathematical Finance*. Segunda edición. Cambridge University Press.

[6] Vélez, R. *Introducción a la Valoración de Opciones*. Departamento de Estadística, Investigación Operativa y Cálculo Numérico. UNED. (Estará disponible en el curso virtual.)

[7] Vélez, R. *Probabilidad y Esperanza Condicionada*. Departamento de Estadística, Investigación Operativa y Cálculo Numérico. UNED. (Estará disponible en el curso virtual.)

10.RECURSOS DE APOYO AL ESTUDIO

En el curso virtual de la asignatura, se proporcionará al alumno diverso material preparado por el equipo docente; en particular, los documentos [2], [6] y [7] de la bibliografía. Además, el alumno dispondrá de resúmenes y apuntes que contienen, de manera más sucinta y esquemática, el material de la asignatura.

11.TUTORIZACIÓN Y SEGUIMIENTO

La tutorización se hará, principalmente, a través del curso virtual de la asignatura y de los foros contenidos en el curso virtual.

También podrán hacerse tutorías presenciales o telefónicas en los despachos 1.13 y 1.15 de la Facultad de Ciencias, y en los teléfonos 91 398 7258 / 7812 en horario de 16h30 a 20h30 todos los miércoles lectivos.

12.EVALUACIÓN DE LOS APRENDIZAJES

El alumno deberá remitir al equipo docente las actividades de evaluación continua resueltas y, a partir de éstas, será evaluado. El envío de las actividades de evaluación continua resueltas podrá ser: por correo electrónico a las direcciones rvelez@ccia.uned.es o bien tprieto@ccia.uned.es; por correo ordinario, dirigido a los miembros del equipo docente, a la siguiente dirección:

Facultad de Ciencias. Calle Senda del Rey, 9. 28040 Madrid.



Para que la evaluación del alumno se produzca en la convocatoria ordinaria, deberá remitir las actividades de evaluación continua antes del día 15 de febrero del curso académico correspondiente, y antes del 15 de septiembre para que la evaluación sea en la convocatoria extraordinaria.

13.COLABORADORES DOCENTES

Véase equipo docente.

