

# MÉTODOS NUMÉRICOS

Curso 2009/2010

(Código: 21153225)

## 1. PRESENTACIÓN

Código de la asignatura: 153225

Curso: Primero

Tipo (Mayoritario): Obligatorio

Cuatrimestre: Segundo

Créditos totales ECTS: 6 (180 h.)

Créditos Teóricos: 2 (60 h.)

Créditos Prácticos: 4 (120 h.)

Descriptorios: Ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales y no lineales. Interpolación y aproximación. Diferenciación e integración numéricas. Solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias.

## 2. CONTEXTUALIZACIÓN

Muchos instrumentos en la Medicina moderna hacen medidas discretas de funciones fisiológicas que luego convierten en funciones matemáticas continuas. Asimismo, la respuesta de las células del sistema a ciertas perturbaciones inducidas por aparatos de medida y exploración se transforma en imágenes que muestran la anatomía o el comportamiento fisiológico de diferentes órganos. Esta conversión de datos en funciones matemáticas continuas o en imágenes requiere la utilización de métodos numéricos.

Por ello, la asignatura Métodos Numéricos es una asignatura del primer curso del Master de Física Médica obligatoria para todos los perfiles (académico, investigador y profesional) y todos los alumnos, salvo aquellos (como los que acceden procedentes de licenciaturas o grados de CC. Matemáticas o CC. Físicas) que ya han cursado asignaturas similares en sus estudios anteriores.

En esta asignatura estudiaremos los fundamentos matemáticos de los métodos numéricos y sus aplicaciones más generales. Las aplicaciones específicas a la física médica serán tema de las asignaturas más especializadas del segundo curso del Master.

## 3. REQUISITOS PREVIOS RECOMENDABLES

Puesto que el objetivo de la asignatura es aproximar conjuntos de datos por funciones analíticas u obtener soluciones a problemas que tienen una difícil solución analítica, es necesario un conocimiento previo de tales problemas. Por lo tanto, es necesario conocer la teoría de funciones analíticas y su representación gráfica, nociones básicas cálculo diferencial e integral, cálculo de máximos y mínimos, ideas básicas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Asimismo es necesario conocer las ideas básicas de la teoría de espacios vectoriales y aplicaciones lineales, matrices y determinantes. Estos temas constituyen parte del contenido de las asignaturas Física Matemática y Complementos Matemáticos de la Física Médica I que se estudian en el primer cuatrimestre del primer curso.



Es aconsejable que el alumno conozca alguno de los lenguajes de programación más usuales para que pueda poner en práctica los métodos estudiados.

#### 4.RESULTADOS DE APRENDIZAJE

##### Conocimientos

- Entender la relación entre los métodos de solución de ecuaciones y la representación gráfica de las funciones analíticas.
- Conocer los polinomios ortogonales importantes y valorar su adecuación a diferentes problemas de aproximación y ajuste de curvas.
- Entender el fundamento de los métodos iterativos y sus condiciones de aplicación.
- Conocer los métodos básicos de descomposición de matrices.
- Saber extender los métodos válidos para la solución de una ecuación a un sistema de ecuaciones.
- Conocer las diferencias entre métodos multipaso y métodos de Runge-Kutta para la integración de ecuaciones diferenciales.
- Entender la combinación de métodos explícitos e implícitos en un método predictor-corrector.
- Conocer las condiciones de aplicabilidad de los métodos numéricos y los orígenes de los errores cometidos en su aplicación.

##### Destrezas

- Ajustar funciones a datos experimentales.
- Estimar cotas para los valores propios de una matriz.
- Resolver sistemas de ecuaciones lineales.
- Aplicar el método de la Transformada de Fourier Rápida al cálculo de espectros de frecuencias de funciones periódicas.
- Obtener expresiones para derivadas de funciones a partir de operadores simbólicos y de polinomios interpolantes.
- Escoger los métodos de integración numérica más adecuados a los comportamientos de las funciones a integrar.
- Valorar las ventajas e inconvenientes de los métodos multipaso y los métodos Runge-Kutta aplicados a diferentes tipos de ecuaciones diferenciales.
- Estimar cotas de error en términos del paso de discretización.

#### 5.CONTENIDOS DE LA ASIGNATURA

##### Tema 1. Resolución de ecuaciones no lineales.

- 1.1.- Métodos de interpolación
- 1.2.- Método de Newton
- 1.3.- Métodos iterativos



#### 1.4.- Errores y convergencia de los métodos

El problema que se plantea en este tema es calcular las raíces de una ecuación  $f(x)=0$ . Este problema es muy común en matemáticas aplicadas. En los casos que estudiamos en este tema la función  $f(x)$  está dada explícitamente, como por ejemplo un polinomio en  $x$  o una ecuación trascendente. En algunos casos poco frecuentes puede ser posible obtener las raíces exactas de la ecuación  $f(x)=0$ ; por ejemplo, cuando se trata de un polinomio factorizable. Sin embargo, en general no es posible y la obtención de soluciones aproximadas debe ser realizada con algún método numérico.

El método de la bisección consiste en localizar una solución en una sucesión de intervalos de tamaño decreciente. Se tiene una función, continua en un intervalo  $[a,b]$  y tal que  $f(a)f(b) < 0$ , y se divide el intervalo por la mitad. Comparado con otros métodos, el método de bisección converge más bien despacio. Los métodos de la secante y de la falsa posición son métodos de interpolación lineal basados en aproximar  $f(x)$  por medio de una recta en la vecindad de la raíz. El método de la falsa posición o regula falsi, es parecido al método de la bisección pero en lugar de dividir el intervalo por la mitad, se toma un intervalo ponderado, teniendo en cuenta más información con respecto al valor de  $f(x)$  en cada etapa. En el método de la secante el intervalo se divide mediante la intersección del intervalo con una recta secante a  $f(x)$ . No es necesario que  $f(a)$  y  $f(b)$  tengan signos opuestos en este caso, y se localiza muy rápidamente el punto en el cual  $f(x)$  es pequeña, pero en general este método no proporciona información sobre lo lejos que puede estar el punto de una raíz de  $f(x)$ .

En el método de Newton, como en la mayoría de métodos iterativos, se empieza con un punto de partida, o punto inicial, que denominaremos  $x_0$ , y se produce una serie de aproximaciones sucesivas,  $x_1, x_2, \dots$ . Para utilizar el método de Newton la función  $f(x)$  debe ser diferenciable y la fórmula que da las sucesivas aproximaciones utiliza la pendiente en un punto (en lugar de la secante como explicamos en el método de la secante anteriormente). Si  $x_0$  está suficientemente próximo a una raíz  $x^*$ , la secuencia de aproximaciones se irá acercando a  $x^*$ . Normalmente la convergencia es bastante rápida de manera que el método suele requerir muy pocas aproximaciones. El punto  $x^*$  se dice también que es un 'cero' de la función  $f$ . La distinción en el lenguaje es que las ecuaciones tienen raíces y las funciones tienen ceros. Se estudiará la condición para la cual el método de Newton converge a un cero y el tipo de convergencia asociado a este método. El método Newton y el método de la secante son ejemplos de métodos de iteración en un punto y en dos puntos, respectivamente, dado que requieren uno o dos puntos iniciales para comenzar el proceso. Proporcionaremos una visión general de los métodos iterativos que utilizan fórmulas de aproximación en un punto.

#### Tema 2. Solución de conjuntos de ecuaciones.

##### 2.1.- Solución por eliminación

##### 2.2.- Descomposición LU. Cálculo de determinantes

##### 2.3.- Métodos iterativos: Jacobi y Gauss-Seidel

##### 2.4.- Sistemas no lineales

Los sistemas de ecuaciones lineales son muy frecuentes en el planteamiento de problemas en numerosas disciplinas e incluso en la vida cotidiana. Aparecen también en el proceso de resolución aproximada de sistemas de ecuaciones no lineales y de sistemas de ecuaciones diferenciales. La expresión matemática de estos problemas es más fácil cuando se usa álgebra matricial: un sistema de ecuaciones lineales se especifica mediante una matriz cuadrada,  $A$ , de orden  $n$ , y un vector  $b$  de orden  $n$ , de manera que  $Ax=b$ . El vector  $x$  de orden  $n$  es la incógnita.

En el método de eliminación se determina la solución, es decir las componentes del vector  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , eliminando en pasos sucesivos: primero  $x_1$  de las ecuaciones  $2, 3, \dots, n$ , después se elimina  $x_2$  de las ecuaciones  $3, 4, \dots, n$ , y así sucesivamente hasta que se obtiene  $x_n$ . Desde el punto de vista matricial se ha obtenido así un sistema equivalente en el que la matriz es triangular superior. El vector solución  $x$  puede obtenerse sin dificultad en caso de que todos los elementos de la diagonal sean no nulos; entonces se realiza una sustitución regresiva a partir de  $x_n$ . Cuando hay elementos de la diagonal nulos o elementos de matriz de tamaño muy desigual se realiza un proceso previo de reordenamiento de la matriz y el sistema es reemplazado por otro sistema equivalente. Este proceso se llama eliminación de Gauss y es en general el método más eficiente para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

En el método de descomposición LU, la matriz se factoriza como  $A=LU$  donde  $L$  es una matriz triangular inferior y  $U$  una matriz triangular superior. Esta factorización se llama descomposición LU de la matriz  $A$ . El motivo de este proceso es que si tenemos que repetir el proceso con la misma matriz  $A$  pero un vector diferente de  $b$ , no hay que realizar todo el proceso de eliminación de nuevo; en lugar de ello nos ahorramos una gran parte de las operaciones, como veremos al estudiar el tema. El número de operaciones aritméticas que requiere un algoritmo es una medida (no la única) del tiempo estimado que requerirá el ordenador para realizar un cálculo. En los métodos de eliminación el número de operaciones es en general proporcional al cubo del orden del sistema y los requerimientos de almacenamiento son proporcionales al cuadrado del orden.



Los métodos anteriores son métodos directos, en contraste con los métodos iterativos que se utilizan cuando aquellos requieren demasiado coste en tiempo y en memoria. Son preferibles en los casos, muy numerosos, en los que la matriz es muy grande y poco densa. En general se parte de una solución inicial  $x(0)$ , y se obtienen estimaciones sucesivas  $x(1)$ ,  $x(2)$ , ... Estudiaremos los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel. En general la idea es reescribir el sistema  $Ax=b$  como  $Nx=b+Px$  donde  $A=N-P$  es un desdoblamiento de  $A$ . La matriz  $N$  debe ser no singular y elegida de manera que  $Nx=f$  sean fáciles de calcular en general. Por tanto el método iterativo se establece como  $Nx(k+1)=b+Px(k)$ ,  $k=0,1,2,\dots$ . Los sistemas de ecuaciones no lineales se pueden resolver con el método de Newton del tema anterior de manera análoga a cuando se trata de una ecuación no lineal.

Tema 3. Interpolación y ajuste de curvas.

- 3.1.- Interpolación de Lagrange
- 3.2.- Interpolación por diferencias
- 3.3.- Interpolación de Hermite
- 3.4.- Interpolación por esplines

En muchas ocasiones conocemos, por observación o medida, los valores de una función en un conjunto discreto de puntos pero nos gustaría conocer qué valores toma dicha función en otros puntos diferentes. Una forma de hacerlo es por interpolación, que consiste en construir una curva continua que pase por los puntos ya conocidos.

El método de interpolación más simple es la interpolación polinomial de Lagrange. Un polinomio es una función con todas las propiedades analíticas deseadas. Un polinomio de grado  $n$  tiene  $n+1$  coeficientes. Por lo tanto, si queremos que el polinomio pase por  $k$  puntos dados (es decir, satisfaga  $k$  condiciones) basta con tomar un polinomio de orden  $n = k - 1$ . Entonces tenemos que resolver un sistema de  $n+1$  ecuaciones lineales cuyas incógnitas son los coeficientes del polinomio. Un sistema alternativo es la interpolación por diferencias divididas. Con este método llegamos al mismo polinomio, aunque ahora los coeficientes se pueden obtener a partir de una tabla de diferencias que se construye mediante simples operaciones aritméticas con los datos conocidos. Otro método de interpolación más sofisticado es la interpolación polinomial de Hermite. Ahora conocemos no solo los valores que toma una función en  $k$  puntos sino también los valores de su derivada en esos mismos puntos. En otras palabras, tenemos  $2k$  condiciones que pueden utilizarse para deducir los coeficientes de un polinomio de orden  $n = 2k - 1$ . Es natural que exista una relación entre los polinomios de Lagrange y de Hermite. De hecho, existe un conjunto de  $k$  polinomios de grado  $n$  a partir de los cuales pueden construirse los polinomios interpolantes de Lagrange y de Hermite para un conjunto de  $k$  puntos dado.

La interpolación polinomial tiene, no obstante, un inconveniente. Un polinomio de orden elevado puede tener un comportamiento que oscila fuertemente. Por ello podemos encontrarnos con que, en efecto, el polinomio pasa por los puntos deseados pero oscila mucho entre ellos. Es decir, podría darse el caso de que el valor interpolado entre los puntos  $i$  e  $i+1$  difiera mucho del valor en dichos puntos, lo que no es un resultado plausible.

Hasta ahora los puntos en los que se basaba la interpolación no guardaban ninguna relación especial. No obstante, en el caso de que estén equiespaciados las fórmulas se simplifican notablemente. Otra posibilidad es que podamos escoger los puntos en los que hacemos las medidas. Si es así, podemos utilizar polinomios especiales que nos garantizan un error menor. Para evitar el uso de polinomios de alto grado se utiliza la aproximación polinomial por trozos o interpolación por esplines (o por cerchas). Esto consiste en dividir el conjunto total de  $k$  puntos en conjuntos menores y aproximar cada uno de estos conjuntos de puntos menores por un polinomio de menor grado. Luego se empalman suavemente estos polinomios en los puntos comunes. El método más utilizado es el de esplines cúbicos. El conjunto total de puntos se divide en conjunto de pares de puntos. Normalmente no conocemos los valores de la derivada de la función en dichos puntos, pero suponemos que los conocemos y obtenemos el polinomio de Hermite correspondiente, que es de grado 3. Luego fijamos estos valores que habíamos dado por supuestos imponiendo la condición de que los polinomios empalmen suavemente en los puntos comunes de los subintervalos.

Tema 4. Aproximación de funciones.

- 4.1.- Aproximación por mínimos cuadrados
- 4.2.- Aproximación por polinomios de Chebishev
- 4.3.- Aproximación por funciones racionales
- 4.4.- Series de Fourier

En la interpolación buscamos una curva que pase exactamente por unos puntos dados. Sin embargo, si los valores de que disponemos no son exactos sino solo aproximados, tiene poco sentido obligar a la curva a pasar por dichos puntos. Es preferible buscar una función continua que no pase exactamente por los puntos sino que pase cerca de dichos puntos de modo que el error global (la suma de los errores en cada uno de estos puntos) sea el mínimo posible. Cuando dicho error se mide por la suma de los cuadrados de las distancias de los puntos a la curva obtenemos el método de mínimos cuadrados.



Normalmente se escoge un polinomio de orden  $n$  menor que el número de puntos y las condiciones de mínimo del error global dan un conjunto de  $n+1$  ecuaciones para los coeficientes del polinomio.

Un caso especial es cuando los datos de que disponemos corresponden a medidas de un fenómeno periódico. Es sabido que cualquier función periódica puede escribirse como un desarrollo de Fourier, es decir, una suma de funciones trigonométricas de tipo  $\sin kx$  y  $\cos kx$ . Por lo tanto, para aproximar datos procedentes de una función periódica utilizamos como polinomio aproximante un polinomio trigonométrico. Los cálculos necesarios se reducen considerablemente si se escoge un polinomio trigonométrico de orden  $n$  y se toman  $n$  puntos convenientemente escogidos dentro del periodo del fenómeno a aproximar. Esto constituye el algoritmo de la transformada de Fourier rápida o FFT (Fast Fourier Transform), cuyo estudio se completará en el tema 5.

La teoría de la aproximación cubre también un problema ligeramente diferente. A veces tenemos una función  $f(x)$  que tiene una expresión analítica complicada. Por ello, puede resultar ventajoso aproximar dicha función en un intervalo  $[a,b]$  de interés por un polinomio, que tiene propiedades analíticas más convenientes. Los cálculos se simplifican si el polinomio  $P(x)$  se escoge como una suma de polinomios ortogonales. Por otra parte, puede interesarnos minimizar los errores locales en una u otra región del intervalo  $[a,b]$  en cuestión. (Por ejemplo, a veces puede interesarnos que la diferencia  $f(x)-P(x)$  sea pequeña en el centro del intervalo que en los extremos, y otras veces puede interesarnos que las diferencias locales sean menores en los extremos). En este caso, el error global que hay que minimizar es la integral sobre el intervalo  $[a,b]$  del cuadrado de la diferencia  $f(x)-P(x)$  ponderada por una función de peso  $w(x)$ . Diferentes funciones de peso  $w(x)$  determinan diferentes conjuntos de polinomios ortogonales. Un tipo especial de polinomios ortogonales son los polinomios de Chebyshev, que tienen la propiedad de que el máximo de los errores locales, es decir,  $\max (f(x)-P(x))$  es menor que para cualquier otro polinomio.

## Tema 5. Derivación e integración numéricas.

5.1.- Derivación numérica

5.2.- Fórmulas por interpolación

5.3.- Cuadratura compuesta

5.4.- Cuadratura gaussiana

5.5.- Integrales múltiples

5.6.- Transformada de Fourier rápida

Tanto la derivación como la integración son relevantes en muchas aplicaciones científicas. En este tema trataremos de aproximar numéricamente derivadas e integrales de funciones. Los métodos numéricos que presentaremos pueden aplicarse tanto a funciones explícitas como a funciones conocidas a través de tablas de valores. Sobre la derivación utilizaremos las fórmulas y tablas de diferencias divididas y haremos uso del método del operador simbólico para calcular derivadas de orden superior. Para obtener fórmulas de aproximación a la derivada más generales veremos cómo hacer uso de las fórmulas de interpolación de Lagrange. Estudiaremos con detalle las fórmulas más comunes que son las que estiman el valor de la derivada de una función con tres y cinco puntos de evaluación. Con el método de extrapolación de Richardson, válido cuando tenemos un método de aproximación que tiene un término de error conocido, obtendremos estimaciones mejoradas del valor de la derivada cuando se usan fórmulas de bajo orden.

También procederemos a evaluar integrales definidas de funciones cuya antiderivada no es explícita o no es fácil de obtener. El método básico es el de la cuadratura numérica, que emplea como aproximación de la integral continua una suma discreta definida en un conjunto de puntos determinados. En este método se utilizan fórmulas de interpolación de la función en dichos puntos. Generalmente, como interpolación de la función a integrar se utiliza el polinomio interpolante de Lagrange de grado  $n$  en dicho conjunto de puntos discretos. El método consiste en integrar esta interpolación de la función. Para nodos igualmente equiespaciados obtendremos, como ejemplos particulares de esta técnica, las famosas reglas de integración: la de trapecio (para el caso de polinomios interpolantes lineales) y la de  $1/3$  de Simpson (para los polinomios interpolantes de grado 2) y la de  $3/8$  de Simpson (para polinomios interpolantes de grado 3). Usando una clase de métodos más generales denominados fórmulas (cerradas y abiertas) de Newton-Cotes en las que se engloban la regla del trapecio y la de Simpson, realizaremos un análisis del error o grado de precisión de estas reglas de integración y de otras más generales.

Para intervalos de integración grandes, con nodos no equiespaciados, es necesario utilizar el método fragmentario, que consiste en subdividir el intervalo de integración en fragmentos menores, aplicando posteriormente a cada subintervalo la fórmula o regla de integración seleccionada. El procedimiento de fragmentación se repite sucesivamente hasta el grado de precisión que se requiera. Cuando se aplica este procedimiento a la regla de integración de Simpson, se obtiene la famosa regla compuesta de Simpson, que es el algoritmo de cuadratura más extensamente utilizado. También se presentarán fórmulas de integración más sofisticadas como la integración Romberg, que hace uso de la regla compuesta del trapecio y de la extrapolación de Richardson para mejorar las aproximaciones.

Si dentro del intervalo de integración la función experimenta variaciones muy grandes en ciertas regiones mientras que en otras exhibe pequeñas variaciones, veremos que, para obtener un algoritmo de integración



eficiente se requiere el uso de métodos adaptativos de cuadratura que utilicen nodos no equiespaciados, es decir, adaptados a las diversas peculiaridades de la función.

Otro método muy interesante para la integración numérica de funciones conocidas explícitamente (no valores tabulados) es la llamada cuadratura gaussiana. Consiste en seleccionar de manera óptima los nodos o puntos de evaluación (no necesariamente equiespaciados) para reducir en lo posible el error esperado de la aproximación. Para ello se utilizan los polinomios como funciones prueba en las que obtener resultados exactos. También veremos cómo extender los métodos estudiados de integración numérica de una variable al caso de integrales impropias e integrales múltiples con límites de integración constantes y variables. Finalmente, mostraremos cómo obtener numéricamente los coeficientes de una serie de Fourier como alternativa a la integración analítica. Veremos cómo realizar una transformada de Fourier discreta y la transformada de Fourier rápida (FFT-Fast Fourier Transform) utilizando la regla trapezoidal y las reglas de Simpson.

Tema 6. Solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias.

6.1.- Método serie de Taylor

6.2.- Métodos Runge-Kutta

6.3.- Métodos multipaso

6.4.- Comparación entre métodos

6.5.- Sistemas de ecuaciones

En muchos modelos que sirven para representar matemáticamente ciertos sistemas se utilizan las ecuaciones diferenciales. En este tema resolveremos aproximadamente (a través de métodos numéricos) ecuaciones diferenciales ordinarias que satisfacen una condición inicial dada. Toda la primera parte de este capítulo está dedicada a la resolución de una ecuación diferencial ordinaria de orden uno, pues al final del capítulo se generalizará el uso de los métodos a sistemas ecuaciones diferenciales de orden superior.

Empezaremos aplicando el método de la serie de Taylor (que no es estrictamente un método numérico). Entre estos métodos se encuentra el método de Euler que es de primer orden y es una ecuación en diferencias asociada a la ecuación diferencial a resolver. Veremos otros métodos de Taylor de orden superior, caracterizando en todos ellos el error local de truncamiento.

A pesar de que los métodos de la serie de Taylor de alto grado tienen un error local de truncamiento de orden alto, requieren mucho cálculo y muchas evaluaciones de las derivadas de funciones. Ello hace que estos métodos sean raramente empleados en la práctica a favor de otros métodos como los de Runge-Kutta, que son el equivalente de una aproximación a la solución exacta al hacerla coincidir con los primeros términos del desarrollo en serie de Taylor. Los métodos de Runge-Kutta de orden dos más conocidos son el método de punto medio, el método modificado de Euler y el método de Heun, pero el método más usado es el de Runge-Kutta de orden cuatro, que tiene un error local de truncamiento de orden 4 necesitando sólo cuatro evaluaciones de la función por paso de iteración. Estudiaremos también el método de Runge-Kutta-Fehlberg que mantiene controlado el error local de truncamiento al quinto orden.

Otro tipo de métodos interesantes para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, diferentes a los anteriormente descritos, son los llamados métodos multipaso. Para aproximar la solución estos algoritmos, en contraposición a los anteriores, además de utilizar los valores del último paso calculado utilizan otros valores calculados de la función en los puntos de iteración anteriores. Existe una clasificación de los mismos en función de si se requiere exclusivamente la información previa para determinar el nuevo paso (métodos explícitos) o de si se requiere los valores del presente y los previamente determinados para estimar la solución en el nuevo paso (métodos implícitos). De entre los más utilizados destacan los métodos explícitos de Adams-Bashforth de 2, 3, 4 y 5 pasos y los implícitos de Adams-Moulton de 3 y 4 pasos. También veremos cómo la combinación de métodos explícitos con implícitos genera un nuevo tipo de métodos de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias conocidos como métodos predictores-correctores. La filosofía de los mismos consiste en que el método explícito predice una aproximación numérica de la solución y el implícito corrige la predicción. Para resolver numéricamente sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden se generalizan los métodos descritos anteriormente. También se utilizan los mismos métodos para un sistema de ecuaciones diferenciales de orden superior sujetas a condiciones iniciales, porque se aplican al sistema equivalente que consiste en transformar las ecuaciones diferenciales de orden superior en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden primer orden. Finalmente se compararán los métodos atendiendo a la exactitud, la intensidad de cálculo requerido en cada paso, y se darán nociones relevantes y aplicables a todos los métodos de resolución numérica de ecuaciones diferenciales: la estabilidad (en el sentido de que pequeñas perturbaciones de las condiciones iniciales generan cambios igualmente pequeños en las aproximaciones posteriores), la consistencia local y global, la convergencia a la solución en función del tamaño del paso utilizado así como la estimación del error global del método.



## 6.EQUIPO DOCENTE

DATOS NO DISPONIBLES POR OBSOLESCENCIA

## 7.METODOLOGÍA

La metodología de la asignatura está basada en la enseñanza a distancia con el apoyo de la plataforma virtual de la UNED, aLF. El estudiante recibirá las orientaciones y el apoyo del equipo docente a través de las herramientas proporcionadas por la plataforma aLF, así como del correo electrónico.

Para el trabajo autónomo y la preparación de esta asignatura los estudiantes deberán disponer de un texto de referencia que cubre ampliamente el temario de la asignatura y que será una herramienta muy útil en su futuro profesional o investigador. Además, el equipo docente propondrá actividades orientadas a afianzar los conocimientos mediante su puesta en práctica.

Cuando sea necesario, el equipo docente proporcionará material aclaratorio de la referencia básica y también documentos de trabajo y ampliación.

Todos estos materiales estarán disponibles a través de la plataforma aLF. A través de la plataforma virtual el alumno también podrá hacer consultas y transmitir sus inquietudes tanto al equipo docente como a sus compañeros.

## 8.BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

ISBN(13): 9788497322805  
Título: MÉTODOS NUMÉRICOS (2004)  
Autor/es: Faires J.L., Burden R.L. ;  
Editorial: Thompson

Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Buscarlo en Catálogo del Patrimonio Bibliográfico

ISBN(13): 9789684443938  
Título: ANÁLISIS NUMÉRICO CON APLICACIONES (6ª)  
Autor/es: Gerald, Curtis F. ; Wheatley, Patrick O. ;  
Editorial: PEARSON ADDISON-WESLEY

Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Buscarlo en Catálogo del Patrimonio Bibliográfico

ISBN(13): 9789687529462  
Título: ANALISIS NUMÉRICO (6ª ed.)  
Autor/es: Burden R.L. ; Faires J.L ;  
Editorial: INTERNATIONAL THOMSON



Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Buscarlo en Catálogo del Patrimonio Bibliográfico

Comentarios y anexos:

Los principales libros de estudio son:

Métodos Numéricos (3ª edición), *J. Douglas Faires y Richard Burden*, Thomson Editores, España, 2004

(Alternativamente puede utilizarse el texto Análisis Numérico, de los mismos autores, editado por Thomson Internacional en México. Las diferencias con el anterior son mínimas)

Análisis Numérico con Aplicaciones (Sexta edición), *Curtis F. Gerald y Patrick O. Wheatley*, Prentice Hall, Pearson Education, México, 2000

## 9. BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

ISBN(13): 9780070287617

Título: INTRODUCTION TO NUMERICAL ANALYSIS (2nd ed.)

Autor/es: Hildebrandt, F. B. ;

Editorial: TATA MACGRAW - HILL

Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Buscarlo en Catálogo del Patrimonio Bibliográfico

ISBN(13): 9780201601305

Título: ANÁLISIS NUMÉRICO :

Autor/es: Kincaid, D. ; Martínez Enríquez, Rafael ; Torres Alcaraz, Carlos ; Cheney, Ward ;

Editorial: Addison-Wesley Iberoamericana

Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Buscarlo en Catálogo del Patrimonio Bibliográfico

ISBN(13): 9788429126778

Título: PROGRAMACIÓN Y CÁLCULO NUMÉRICO

Autor/es: Michavila, Francisco ; Gavete, Luis ;



Editorial: REVERTÉ

Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Buscarlo en Catálogo del Patrimonio Bibliográfico

ISBN(13): 9788429150582

Título: ANÁLISIS NUMÉRICO

Autor/es: Cohen, Alan M. ;

Editorial: REVERTÉ

Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Buscarlo en Catálogo del Patrimonio Bibliográfico

Comentarios y anexos:

HILDEBRAND, F. B.: Introduction to Numerical Analysis, Dover, New York.

COHEN, A. M.: Análisis Numérico, Ed. Reverté, Barcelona, 1982.

KINCAID, D. Y CHENEY, W. : Análisis numérico: Las matemáticas del cálculo científico, Addison Wesley Iberoamericana, 1994.

MICHAVILA, F. Y GAVETE, L.: Programación y cálculo numérico, Ed. Reverté, Barcelona, 1985.

## 10. RECURSOS DE APOYO AL ESTUDIO

La UNED posee la licencia del programa ScientificNotebook, un procesador de textos científicos que incluye una versión reducida del programa Maple de cálculo simbólico.

Por otra parte, existen algunos lenguajes de programación elementales de acceso libre (en particular gwbasic y similares) que, por su sencillez, pueden resultar útiles para probar algunos resultados. Finalmente, el programa Easy Java Simulations, también de libre acceso, ofrece posibilidades de representación gráfica de funciones y de integración numérica.

## 11. TUTORIZACIÓN Y SEGUIMIENTO

Como ya se ha indicado en el apartado "Metodología", el Curso Virtual es el instrumento fundamental para la tutorización y seguimiento del aprendizaje. No obstante, el estudiante también tendrá acceso a realizar consultas al equipo docente a través del correo, teléfono y presencialmente en los horarios establecidos para estas actividades. Los datos personales del equipo docente son:

Emilia Crespo del Arco

e-mail: emi@fisfun.uned.es

Tel.: 91 3987123

Despacho: 211A de la Facultad de Ciencias de la UNED

Guardia: los miércoles, de 16:00 a 20:00



Mar Serrano Maestro  
e-mail: mserrano@fisfun.uned.es  
Tel.: 91 3987126  
Despacho: 208 de la Facultad de Ciencias de la UNED  
Guardia: los miércoles, de 16:00 a 20:00

## 12.EVALUACIÓN DE LOS APRENDIZAJES

La evaluación se hará a partir de trabajos propuestos para hacer en casa y enviar al equipo docente de la Sede Central. Estos trabajos representarán un 90% de la calificación final. También se harán exámenes on-line a través del Curso Virtual. Asimismo se valorará la participación de los alumnos en los Foros del Curso Virtual.

## 13.COLABORADORES DOCENTES

Véase equipo docente.

