

ASIGNATURA DE MÁSTER:  

# INTRODUCCIÓN A LA CIENCIA NO LINEAL

Curso 2009/2010  
(Código:21156011)

## 1.PRESENTACIÓN

Se dice que un sistema es no lineal si fenómenos simples crean estructuras complejas. Se caracteriza como no lineal si las relaciones causa-efecto son no lineales, aun siendo de consecuencia, las descripciones lineales de estos sistemas llevan al fracaso, requiriéndose para su correcto modelado de ecuaciones no lineales. Los sistemas no lineales son típicos en la naturaleza y se manifiestan en la complejidad que generan en el tiempo y el espacio.

La falta de recursos matemáticos para resolver las ecuaciones no lineales hizo que no hayan podido abordarse seriamente hasta los años sesenta del pasado siglo, en los que los ordenadores suficientemente potentes permitieron suplir con máquinas la falta de herramientas analíticas. A partir de allí, el estudio del mundo no lineal gana momento y se crea toda una ciencia alrededor de él. Se reviven viejos experimentos y se plantean nuevos, el diseño de nuevas herramientas matemáticas cobra impulso y se constituye un marco conceptual como veremos, englobar fenómenos de, prácticamente, todas las disciplinas.

El espacio y el tiempo, y la organización y estructura de estos, tal como la observamos, son producto de procesos no lineales. El mundo no lineal se manifiesta en todos los ámbitos. Las estructuras vivas, los fenómenos atmosféricos, las reacciones químicas, los paisajes, los minerales, entre otros, son esferas en las que esto se hace notorio. Por ello, la ciencia no lineal, aunque aquí, en el contexto de un máster en física, pueda parecer sorprendente. Invocaremos a lo largo del curso la rica fenomenología de otras áreas.

Este curso es una breve introducción a la ciencia no lineal y, por lo tanto, las ecuaciones de interés son diferenciales ordinarias, diferenciales parciales y recurrencias iterativas, con descripciones matemáticas de numerosos sistemas en física, biología, química, economía, ingeniería, etc. Estos sistemas muestran un variado y complejo comportamiento dinámico que a abordar desarrollando herramientas lineales y no lineales para su análisis y apoyándonos en modelos procedentes de campos tan dispares como la física y la economía. A lo largo se hace énfasis en el comportamiento cualitativo de los modelos; en particular, en cómo cambia la naturaleza del comportamiento del sistema cuando se varían los parámetros, y en las bifurcaciones. Nuestra aproximación al problema se basará en el manejo de conceptos e intuición geométrica, con un tratamiento matemático informal y amigable, pero sin perder rigor.

La geometría fractal estudia los objetos irregulares. Algunos de los que nos encontraremos en ciertas etapas del desarrollo del curso tendrán esa naturaleza. Por esa razón, nos interesa la geometría fractal, ciertamente, por los fractales, aunque la envergadura del campo de la geometría fractal haga literalmente imposible cualquier tipo de profundización en un curso como éste. Esta observación se hace extensiva al propio ámbito natural de este curso, que no será más que una breve presentación para, hablando en forma coloquial, "abrir boca". El estudio que vamos a emprender necesita de herramientas de análisis potentes. La UNED pone a disposición de sus estudiantes el programa de manipulación simbólica MAPLE descargar gratuitamente desde el portal de la UNED (Medios y Servicios -> Centro de Servicios Informáticos). MAPLE, al igual que MATHEMATICA, ofrece un potente conjunto de herramientas para el análisis de ecuaciones diferenciales, gráficos, generación de fractales, etc., que serán de máxima utilidad a lo largo del curso. Existen numerosos enlaces en la web que ofrecen soluciones a los problemas que se plantearán a lo largo del curso. Serán referencia obligada a lo largo del curso.

## 2.CONTEXTUALIZACIÓN

Podemos considerar a la presente asignatura como básica e instrumental por dos razones. Es, sobre todo, una materia de corte fundamentalmente matemático y desarrolla conocimientos ya adquiridos, en titulaciones científicas y técnicas, sobre mecánica clásica, física de fluidos, ecuaciones diferenciales (ordinarias y parciales), teoría de matrices, teoría de perturbaciones, métodos numéricos y geometría. La segunda razón radica en la proyección que sus contenidos van a tener en el currículo del máster. La práctica mayoritaria de las asignaturas de este título académico acuden, en mayor o menor medida, a conceptos o técnicas desarrollados en esta asignatura. Las asignaturas como "Inestabilidades y turbulencia", "Fluctuaciones en sistemas dinámicos" o "Modelización y simulación de sistemas complejos", hunden sus raíces en la ciencia no lineal. Otras, como "Interacción de la radiación con sistemas de interés biológico", tendrán, eventualmente, una relación muy circunstancial. El carácter metodológico y fuertemente interdisciplinar de la asignatura le permite extender su ámbito de interés a numerosas disciplinas. En la práctica, las disciplinas que tienen un cierto grado de formalización matemática, se enfrentan, tarde o temprano, a problemas de carácter no lineal. Materias como la química, la geología, han integrado progresivamente la no linealidad en sus respectivas formulaciones. Otras, como la economía o, recientemente, la historia, están dando pasos en este sentido.

## 3.REQUISITOS PREVIOS RECOMENDABLES

Conocimiento de la teoría general de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, nociones de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, álgebra lineal, métodos numéricos simples y técnicas elementales de manipulación simbólica. Es imprescindible un conocimiento del inglés, nivel B1.

## 4.RESULTADOS DE APRENDIZAJE

En consonancia con lo expresado anteriormente, podemos enumerar los siguientes objetivos concretos a alcanzar durante el curso.

- Deberá haber entendido las características distintivas de fenómenos no lineales y manipular su terminología en distintos contextos: fluidos, reacciones químicas, procesos biológicos, etc.
- Conocerá los comportamientos más relevantes de sistemas no lineales, como el problema de Bénard, sistemas de activación-inhibición, reacción de Belousov-Zhabotinsky, etc.
- Estará capacitado para: a) el análisis de estabilidad lineal; b) la construcción de soluciones de series perturbativas simples; c) el establecimiento de las ecuaciones de un sistema no lineal a partir de puntos fijos; d) la manipulación de recurrencias iterativas simples.
- Deberá haber adquirido habilidades en técnicas de exploración y resolución numéricas, y en la utilización de técnicas de manipulación simbólica (MAPLE) en problemas no lineales.
- Deberá haberse iniciado en el modelado de sistemas no lineales.

A esto, habremos de añadir destrezas y competencias transversales a adquirir o cultivar:

- Haberse iniciado en la lectura crítica de artículos de revistas científicas en inglés y posibilidad de síntesis de lo leído.
- Saber emprender la reproducción de los cálculos de determinados artículos simples.
- Ejercitarse en la realización de búsquedas bibliográficas sistemáticas.
- Prepararse (o entrenarse, en su caso) para la exposición oral y/o escrita de trabajos científicos.
- Saber transferir conocimientos, métodos y técnicas entre distintas disciplinas.
- Tener capacidad de abstracción del contexto particular de un problema.
- Tener aptitud para abordar el estudio de problemas no exclusivos de la física.
- Haber adquirido la capacidad de exponer un trabajo, tanto en forma escrita como oral.
- Poder leer ciertos artículos de revistas especializadas, con sentido crítico y capacidad de síntesis.
- Estar capacitado para realizar búsquedas bibliográficas.

Y las siguientes destrezas específicas:

- Saber reconocer patrones típicos de fenómenos no lineales.
- Saber entender y modelar fenómenos no lineales simples.
- Conocer el carácter interdisciplinar de la materia y lograr experiencia en identificar similitudes entre fenómenos de distintos ámbitos científicos.
- Dominar el análisis lineal de puntos fijos e interpretar sus distintos escenarios; saber construir un desarrollo en serie de las soluciones alrededor de puntos fijos y plantear problemas de estabilidad; saber reconocer y manipular las bifurcaciones primarias.
- Saber diseñar estrategias simples de exploración previa del espacio de fases y realizar la integración numérica de modelos simples.

## 5.CONTENIDOS DE LA ASIGNATURA

Tema 1. La ciencia no lineal: una introducción a la complejidad en el tiempo.

### Resumen

La noción de oscilador, y la de vibración, es esencial para el estudio de la dinámica de las evoluciones no monótonas, y constituye un excelente ejemplo para introducirnos en las ideas de estructuración y complejidad en el tiempo. Empezaremos con un repaso al péndulo simple - del que sería un error pensar que es un problema trivial - y su contrapartida natural amortiguada. Nos preguntaremos qué es necesario para mantener las oscilaciones, analizando en detalle los osciladores de van der Pol y paramétrico, como casos de oscilaciones sostenidas que nos llevarán al concepto de ciclo límite.

### Esquema

- Recordando los osciladores clásicos: el oscilador libre y los sistemas conservativos, el oscilador amortiguado y los sistemas disipativos.  
-El oscilador mantenido y la ecuación de van der Pol.



- El ciclo límite.
- El oscilador paramétrico.

Tema 2. La ciencia no lineal: un recorrido por la complejidad en el espacio.

Resumen

La auto-organización del espacio es otra de las consecuencias de la no-linealidad. Aquí, cruzados ciertos puntos críticos, el sistema crea estructuras reconocibles, en una manifestación a la que nos referiremos como de "ruptura de simetría". Prácticamente todas las disciplinas, desde la mecánica a la biología, ofrecen ejemplos de este fenómeno. Sin embargo, ante tal diversidad, reconoceremos patrones comunes que nos permitirán, más tarde, edificar una teoría unificada.

Esquema

- Un primer ejemplo: la convección.
- Estructuras naturales.
- Estructuras en el laboratorio.

Tema 3. Una simple teoría cualitativa de bifurcaciones locales de codimensión 1

Resumen

La descripción de los ejemplos de los dos temas anteriores nos permite abordar de forma muy simple la noción de bifurcación, concepto fundamental en el estudio de los sistemas no lineales. Pasado el punto crítico en el espacio de parámetros del sistema, la observación de una ruptura de simetría se traduce, desde un punto de vista matemático, en lo que se denomina una bifurcación. Se trata simplemente de un cambio cualitativo en las soluciones de las ecuaciones. Como la dimensión del espacio de parámetros depende del sistema, hemos de liberarnos de toda restricción derivada de este hecho. Es cuando interviene el concepto de codimensión de una bifurcación. Desarrollaremos el caso más simple de codimensión igual a uno, sistematizando las bifurcaciones posibles y lo que llamaremos sus formas normales.

Esquema

- Conceptos de bifurcación local y codimensión.
- Bifurcaciones supercríticas de codimensión 1 de puntos fijos; formas normales.
- Bifurcaciones subcríticas. Bifurcaciones de codimensión 1 de órbitas periódicas.

Tema 4. La sección de Poincaré

Resumen

A partir de los temas anteriores podemos observar que la evolución de los sistemas que nos interesan, están convenientemente descritos por un sistema de ecuaciones diferenciales. En la gran mayoría de los casos el sistema no es integrable y hemos de estudiar cada solución con ayuda de la trayectoria en el espacio de fases. Como este objetivo se hace difícil, o irrealizable, en cuanto sobrepasemos la dimensión dos, se simplifica al máximo esta labor acudiendo a una técnica puesta a punto por Poincaré y que invoca la construcción de una aplicación de iteración, mucho más sencilla de visualizar. El estudio de esta aplicación nos permitirá introducirnos en las consecuencias de una discretización del tiempo (cuestión que ampliaremos en el siguiente tema) y en los distintos tipos de evolución temporal que admiten los sistemas no lineales.

Esquema

- Construcción y propiedades. Interés práctico.
- Secciones de soluciones periódicas, cuasiperiódicas y aperiódicas.
- Iteraciones unidimensionales. Ejemplos.

Tema 5. Ecuaciones de recurrencia – Mappings

Resumen

Una relación del tipo  $x(t+1)=f[x(t)]$ , en la que la variable  $x$  es evaluada en el paso  $(t+1)$  a partir de su valor en el paso  $t$ , a través de una función  $f$ , se denomina una recurrencia aplicaciones iterativas y mapping en inglés). El tema anterior ya nos permitió construir una de ellas a partir de un sistema de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, las recurrencias con por derecho propio, sirviendo de modelo en muchos fenómenos de todo tipo. En este capítulo elaboraremos una aproximación a la teoría de las recurrencias unidimensionales, haciendo en el caso en el que  $f$  es una función cuadrática. Este caso es el prototipo de recurrencia por excelencia, que permite desarrollar de forma sistemática las circunstancias que rodean las recurrencias, desde su implementación geométrica y numérica hasta la amplia gama de soluciones que ofrecen, movimientos caóticos incluidos.

Esquema

- Ecuaciones lineales.
- Procedimientos de iteración.
- Ecuaciones no lineales.
- Estados estacionarios y su estabilidad.
- Ciclos y su estabilidad.
- Cuasiperiodicidad y caos.

Tema 6. Estabilidad de puntos fijos

Resumen

El cambio de comportamiento de un sistema no lineal está ligado a la idea de estabilidad de soluciones de un sistema. Las soluciones más simples las constituyen los puntos fijos y de cuantificarla nos ocuparemos en este tema, por medio de lo que se denomina principio de estabilidad lineal, que reduce el problema de la estabilidad a un simple problema lineal.

Esquema

- Formulación general
- Sistemas de una variable.
- Sistemas de dos variables.
- Sistemas de tres o más variables.

Tema 7. Comportamiento no lineal alrededor de puntos fijos.

Resumen

La estabilidad lineal estudiada en el anterior tema nos permite saber para qué valores de los parámetros un determinado punto fijo se desestabiliza. Esto permitirá que aparezcan una o más nuevas soluciones que significarán un cambio de comportamiento. Aunque de forma muy cualitativa, ya vimos en el Tema 3 que este hecho estaba ligado a noción de bifurcación. Necesitamos ahora familiarizarnos con técnicas que nos permitan saber algo más sobre cómo propiedades tienen estas nuevas soluciones. Para ello es indispensable acudir a un tratamiento no lineal, puesto que la aproximación lineal estudiada en el tema anterior es inapropiada para tema, formalizamos todos estos conceptos.

Esquema

- Formalización de la estabilidad lineal.
- Teoremas de bifurcación. Soluciones para valores propios nulos.
- La ecuaciones de amplitud para las bifurcaciones de tipo transcritical, horquilla y de punto límite.
- La bifurcación de Hopf.

Tema 8. Dinámica y fractales

Resumen

No existe una definición clara del concepto de estructura, u objeto, fractal, aunque podemos



satisfacernos diciendo que un objeto posee tal estructura si presenta irregularidades en cualquier escala en la que es observado, desde la macroscópica hasta la microscópica. A esta idea hace referencia el concepto de auto-similitud, que introduciremos en este tema. Los fractales entran en la geometría como un intento de describir de forma más completa la irregularidad en la forma de los objetos naturales. En ciencia no lineal, se utilizan los fractales para cuantificar en el espacio de fases la dimensión de los atractores extraños. También pu para describir fenómenos irregulares a lo largo del tiempo, de la propia evolución de la solución, por ejemplo. En este capítulo haremos una muy breve aproximación a lo que constituy conocimiento (fractales y atractores extraños) de amplitud.

**Esquema**

- El concepto de auto-similitud.
- La auto-similitud en el tiempo.
- Dinámica y fractales
- Los atractores extraños y su caracterización cuantitativa: exponentes de Liapunov.

Tema 9. Sistemas espacialmente distribuidos.

Resumen

Nos hemos centrado hasta ahora en los sistemas que desarrollan organización y complejidad en el tiempo. Este tema ahonda en aquellos sistemas, ya entrevistos en el Tema 2, en los espacio. Aquí, el problema se hace más complejo y ambicioso y, ciertamente, la teoría aumenta en dificultad. Sólo abordaremos dos problemas concretos, lo suficientemente generales para poner de manifiesto el tipo de cuestiones que se pueden plantear. El primero, es la convección de Bénard, ejemplo prototípico en el desarrollo de la física no lineal. El segundo, lo representan los ubicuos sistemas de reacción-difusión, presentes en todo tipo de ámbitos (biología, física, química, petrología, etc.) y su manifestación más representativa, la inestabilidad de Turing, que descubriremos a largo de numerosos ejemplos.

Esquema

- El problema de Bénard.
- Los sistemas de reacción-difusión.
- La inestabilidad de Turing.

APÉNDICE I: Introducción a los gráficos en Maple y los paquetes de ecuaciones diferenciales.

APÉNDICE II: La transformación de Fourier.

6.EQUIPO DOCENTE

DATOS NO DISPONIBLES POR OBSOLESCENCIA

7.METODOLOGÍA

La docencia se impartirá a través de un curso virtual dentro de la plataforma educativa de la UNED.

Dentro del curso virtual el alumno dispondrá de:

- \* Página de bienvenida, donde se indica el concepto general de la asignatura y se presentan a los docentes.
- \* Calendario, donde se establece el orden temporal de actividades.
- \* Una guía de estudio para cada uno de los temas del programa, con un desarrollo completo del tema, los objetivos del aprendizaje, la bibliografía básica y complementaria de est y actividades propuestas.
- \* Materiales complementarios

Todos estos materiales de apoyo se encontrarán accesibles en la web de la UNED, en el espacio virtual de esta asignatura.

Estos recursos, serán complementados por parte del estudiante con:

- \* La participación en los foros de debate.
- \* La realización periódica de ejercicios, individualmente o en grupo, de puesta a prueba de los conocimientos adquiridos
- \* Memoria de curso, en la que el estudiante deberá presentar, de forma oral, si posible, un trabajo independiente de resumen de un artículo de la literatura científica o de un tema.

8.BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

Comentarios y anexos:

Aunque existe una amplia literatura sobre la no linealidad, en la que encontraremos muchos textos dedicados a una introducción al tema, el presente curso, por sus características básico determinado. La diversidad de materiales y la forma en que estos deben ser tratados, hace difícil encontrar un único texto que satisfaga adecuadamente todos los requisit de añadir la ausencia de textos avanzados en español, lo que obliga a acudir a la literatura en inglés, hipotecada, en cierta forma, por las eventuales dificultades en asegurar la ofer

En consecuencia, el material de estudio será redactado por el profesor de la asignatura y remitido, progresivamente, a medida que avance el curso. Este material consistirá en un el desarrollo del tema, ejemplos resueltos y ejercicios propuestos, acompañado de la bibliografía correspondiente y de copias de artículos que amplían ciertos aspectos relevantes.

9.BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

Comentarios y anexos:

La ausencia de un único libro de texto no excluye ofrecer la bibliografía que servirá de base en cada uno de los temas.

Grégoire Nicolis, Introduction to Nonlinear Science (Cambridge University Press, 1995). Sirve de base para los Temas 6 y 7, y aporta una referencia interesante para los Temas 1, 2

Daniel Kaplan y Leon Glass, Understanding Nonlinear Dynamics (Springer-Verlag, Nueva York, 1995). Este libro, aunque dirigido fundamentalmente a biólogos y ofreciendo un r elemental, es realmente excelente. Las explicaciones son muy claras y ofrece numerosos ejemplos de interés. Sirve de base para el Tema 5.

James Murray, Mathematical Biology, Vol. 2 (Springer-Verlag, 2002). Libro de referencia obligada para el estudio de los problemas no lineales en biología. No por ello, deja matemático alto. Tiene un tratamiento de los problemas de reacción-difusión y las inestabilidades de Turing que es un referente en la literatura especializada.

Koch and Meinhardt, Biological pattern formation: from basic mechanisms to complex structures, Reviews of Modern Physics 66, 1481 (1994). Este artículo tiene la ventaja de través del catálogo de revistas electrónicas de la UNED. Excelente tratamiento de los problemas de reacción-difusión. Constituirá parte del material del curso para el Tema 8.

M.H. Cross and P.C. Hohenberg, Pattern formation outside of equilibrium, Reviews of Modern Physics 65, 851 (1993). Exhaustivo artículo de revisión sobre estructuras en sistemas apropiado para una lectura para aquellas personas que quieran profundizar en la materia. Es accesible a través del catálogo de revistas electrónicas de la UNED y, en parte, se incl de estudio.

S. H. Strogatz, Nonlinear Dynamics And Chaos: With Applications To Physics, Biology, Chemistry, And Engineering (Westview Press, 2001). Este libro es una referencia obligada p sobre dinámica no lineal. Ha obtenido numerosos elogios y constituye una buena adquisición para una biblioteca sobre la materia. Su consulta servirá de ayuda para los Temas 1, 2

R.H. Enns and G. McGuire, Nonlinear Physics With Maple for Scientists and Engineers (Birkhauser Verlag AG, 2000). Estamos ante un libro dedicado enteramente a la física no lir gran ventaja está en que no es necesario un conocimiento previo, ni de Maple, ni de programación, para empezar con él. Incluye un CD con programas Maple y hojas de cálculo útiles.

10.RECURSOS DE APOYO AL ESTUDIO



La UNED pone a disposición de sus estudiantes unos excelentes recursos para la ayuda al trabajo en esta asignatura. Ya se ha citado el programa de manipulación simbólica MAI obtenerse para las plataformas Windows, OSX y Linux. Al mismo tiempo se puede descargar un manual tutorial de usuario que contiene las explicaciones para desenvolverse con las básicas del programa.

La Biblioteca Central dispone de más de 200 libros de referencia específicos sobre la materia, sin contar con los dedicados a materias afines, como las ecuaciones diferenciales, matemática, etc. Hay que añadir el amplio catálogo de revistas en formato impreso y electrónico, entre las cuales se encuentran muchas de las que dedican secciones a problemas no lineales.

11.TUTORIZACIÓN Y SEGUIMIENTO

Profesor: Víctor Fairén Le Lay  
E-Mail: [vfairén@ccia.uned.es](mailto:vfairén@ccia.uned.es)  
Teléfono: 91 398 7124  
Horario: Miércoles, de 16,00h a 20,00h  
Despacho: 209 – Facultad de Ciencias

12.EVALUACIÓN DE LOS APRENDIZAJES

En la evaluación, hasta 10, entran dos factores, con sus correspondientes pesos:

1. Por una parte, en esta asignatura se realizarán dos pruebas de evaluación on line: la primera, sobre los temas del 1 al 5, y la segunda, sobre los temas 6 al 9. Estas pruebas ciertos resultados del aprendizaje del estudiante, como son las destrezas específicas señaladas en el apartado "Resultados del Aprendizaje" y ciertas de las destrezas y competencias transversales detalladas allí. Cada una de estas pruebas contabilizará hasta un 35% de la nota final, sumando entre ambas un máximo de un 70% de la misma.
2. El 30% restante de la nota, procederá de un trabajo de fin de curso y en el cual se evaluarán especialmente destrezas y competencias transversales. Aspectos como la redacción, exposición, capacidad para realizar búsquedas bibliográficas, sentido crítico y capacidad de síntesis o la transferencia de conocimientos entre disciplinas, serán especialmente trabajados, deberá ser expuesto y defendido, en la medida de lo posible, personalmente por el estudiante.

13.COLABORADORES DOCENTES

Véase equipo docente.

