

INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIOS DE HILBERT

Curso 2015/2016

(Código:61023044)

1.PRESENTACIÓN DE LA ASIGNATURA

La teoría de los espacios de Hilbert puede considerarse como una continuación natural de la teoría de los espacios euclídeos: un espacio de Hilbert es un espacio normado completo cuya norma procede de un producto interno. El producto interno permite introducir conceptos como ángulo, ortogonalidad o proyección ortogonal; la completitud permite introducir el concepto de base ortonormal. Todos estos conceptos de espacios euclídeos ascienden a espacios vectoriales de dimensión infinita tales como algunos espacios vectoriales de sucesiones de números complejos o de funciones. Son estos espacios infinito dimensionales los que confieren una gran utilidad a la teoría de los espacios de Hilbert por sus múltiples aplicaciones.

2.CONTEXTUALIZACIÓN EN EL PLAN DE ESTUDIOS

Introducción a los Espacios de Hilbert es una asignatura que en el plan de estudios de la titulación figura en el primer cuatrimestre del tercer curso. Tiene carácter obligatorio y se le asignan 6 ECTS.

Las competencias del grado de matemáticas que se trabajan en particular en esta asignatura son:

CED1 Comprensión de los conceptos básicos y familiaridad con los elementos fundamentales para el estudio de las matemáticas superiores.

CEP4 Resolución de problemas.

CEA1 Destreza en el razonamiento y capacidad para utilizar sus distintos tipos, fundamentalmente por deducción, inducción y analogía.

CEA4 Habilidad para detectar inconsistencias de razonamiento ya sea de forma teórica o práctica mediante la búsqueda de contraejemplos.

CEA7 Habilidad para presentar el razonamiento matemático y sus conclusiones de manera clara y precisa, de forma apropiada a la audiencia a la que se dirige, tanto en la forma oral como escrita.

La estructura operativa de los espacios de Hilbert es una herramienta fundamental en campos de las matemática, física e ingeniería como las ecuaciones en derivadas parciales, la mecánica cuántica, la teoría de la señal, la teoría de los procesos estocásticos de cuadrado integrable, la modelización de los mercados financieros, etc.

La teoría de los espacios de Hilbert constituye el núcleo a partir del cual se desarrolló el análisis funcional. Los conceptos subyacentes en los espacios de Hilbert son los conceptos de espacio vectorial y de producto interno. El producto interno define una norma aunque no toda norma proviene de un producto interno. En consecuencia, esta asignatura extiende por una lado el estudio de los espacios euclídeos y por otro lado tendrá una extensión a los espacios normados en una asignatura posterior.

3.REQUISITOS PREVIOS REQUERIDOS PARA CURSAR LA ASIGNATURA

Los conocimientos previos necesarios son esencialmente básicos y quedan perfectamente cubiertos con los contenidos de las siguientes asignaturas:



Funciones de una variable (I y II), Funciones de varias variables (I y II), Álgebra lineal (I y II).

Se requiere a su vez manejar con soltura los cálculos con números complejos. p.e, lo que se estudia en la asignatura *Lenguaje matemático, conjuntos y números*. Ocasionalmente, en algunos ejemplos, se utiliza algún resultado de la asignatura *Variable Compleja* aunque no se desarrolla ningún método de análisis complejo.

4.RESULTADOS DE APRENDIZAJE

Los resultados específicos de la asignatura son:

Reconocer si un espacio vectorial tiene estructura de espacio de Hilbert o no. Estudiar la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la fórmula del paralelogramo.

Conocer las estructuras básicas en los espacios de Hilbert reales y complejos. Estudiar la herramienta básica: ortogonalidad.

Descomponer algunos espacios de Hilbert como suma directa de un subespacio cerrado y su ortogonal.

Encontrar mejores aproximaciones de vectores. Manejar los conceptos de proyección y sus aplicaciones.

Construir bases ortonormales en espacios de Hilbert concretos. Manejar los conceptos de desarrollo en bases ortonormales, el método de ortogonalización de Gram-Schmidt y las propiedades mas importantes de los espacios de Hilbert.

Familiarizarse con las propiedades básicas de los espacios l^2 y L^2 .

Desarrollar funciones sencillas en serie de Fourier. Calcular la suma de series numéricas mediante series de Fourier. Conocer y ser capaz de estudiar la convergencia puntual y uniforme de algunas series de Fourier.

Verificar el teorema de representación de Riesz en casos concretos. Utilizar la dualidad en los espacios de Hilbert. Teoremas de caracterización de las formas lineales continuas en un espacio de Hilbert. Estudiar los operadores autoadjuntos y unitarios.

Conocer las propiedades básicas de la transformada de Fourier y de los operadores de convolución.

Reconocer los espacios de Hilbert con núcleo reproductor y en particular los espacios de Paley-Wiener. Aplicar el teorema de muestreo de Shannon.

5.CONTENIDOS DE LA ASIGNATURA

1 Introducción

- 1.1. Espacios vectoriales de dimensión infinita
- 1.2. Generalizando las normas usuales de $\mathbb{R}^d$ o $\mathbb{C}^d$
- 1.3. Equivalencia de normas
- 1.4. Sucesiones de Cauchy: completitud
- 1.5. Otras diferencias esenciales
- 1.6. Generalizando los espacios euclídeos

2. Espacios con producto interno

- 2.1. Producto interno, espacio prehilbertiano
- 2.2. Propiedades geométricas
- 2.3. Propiedades topológicas
- 2.4. Espacios completos: espacios de Hilbert

3. El problema de la mejor aproximación

- 3.1. Planteamiento del problema



3.2. Proyección sobre un conjunto convexo y completo

3.3. Teorema de la proyección ortogonal

4. Bases ortonormales en un espacio de Hilbert

4.1. Sistemas ortonormales

4.2. Aproximación con un sistema ortonormal

4.3. Bases ortonormales

4.4. Ejemplos de bases ortonormales

5. Series de Fourier clásicas

5.1. Desarrollo en serie de Fourier

5.2. Desarrollo en senos y cosenos

5.3. Convergencia puntual de una serie de Fourier

5.4. Algunos temas complementarios

5.4.1. Cálculo de los coeficientes de Fourier: La transformada discreta de Fourier

5.4.2. Cálculo rápido de la transformada discreta de Fourier

5.4.3. El fenómeno de Gibbs

6. Operadores lineales acotados

6.1. Operadores lineales acotados

6.2. Proyecciones

6.3. Representación de formas lineales continuas

6.4. Operador adjunto. Operadores autoadjuntos y unitarios

7. La transformada de Fourier

7.1. Operadores de convolución

7.2. La transformada de Fourier

7.2.1. La transformada de Fourier en L^1

7.2.2. La transformada de Fourier en L^2

7.3. La transformada de Hilbert en L^2

8. Espacios de Hilbert con núcleo reproductor

8.1. Espacios de Hilbert con núcleo reproductor

8.2. Algunos ejemplos de RKHS

8.3. Espacios de Paley-Wiener

6.EQUIPO DOCENTE

■ [MARIA JOSE MUÑOZ BOUZO](#)

7.METODOLOGÍA Y ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

El plan de trabajo se referirá al texto base *Espacios de Hilbert y Análisis de Fourier: los primeros pasos* (A. García García y M.J. Muñoz Bouzo). En él se fijan tanto los contenidos del estudio como la notación, que puede cambiar en los distintos libros que tratan de la materia. En la segunda parte de la guía de estudio, Plan de Trabajo, se darán orientaciones concretas para el estudio de los temas, se insistirá en el tipo de ejercicios sobre los que el alumno deberá trabajar, y se indicará un cronograma temporal sobre la distribución de contenidos.

Gran parte de la formación recae sobre el trabajo personal del alumno con la bibliografía recomendada, básica y complementaria, siempre con la ayuda del profesor de la Sede Central de la UNED, los tutores y las tecnologías de ayuda de la UNED.

Los contactos con el equipo docente pueden ser: por teléfono, en su horario de guardia, presenciales en la Sede Central, previa cita, por e-mail, correo postal, y el curso virtual. Vamos a hacer hincapié en el curso virtual, porque está siendo una



herramienta de enorme utilidad para los estudiantes en los últimos años.

En el foro de consultas generales se plantearán preferentemente cuestiones de carácter burocrático, de gestión o de procedimientos de evaluación.

En el foro de alumnos se podrán comunicar con los otros alumnos, no es un foro tutelado por lo que los profesores no se responsabilizarán del contenido del mismo.

Finalmente se podrán crear foros de cuestiones concretas: foros específicos de dudas sobre contenidos, que estarán orientados a la profundización y comprensión de los distintos temas. Los alumnos podrán realizar consultas razonadas y concisas sobre el tema.

8.EVALUACIÓN

La Prueba Presencial en los Centros Asociados y en las fechas fijadas por la UNED tendrá el mayor peso en la nota final del alumno.

La Prueba será de desarrollo y consistirá en un examen con cuatro o cinco preguntas teóricas o prácticas, que podrán tener diversos apartados.

La duración de esta prueba es de dos horas.

Representará al menos un 80 % de la calificación final, dependiendo de la realización de prueba de evaluación continua.

La notación utilizada en las Pruebas Presenciales será la del texto base, existiendo la obligación de conocerla.

En los exámenes no se permitirá ningún material ni calculadora.

En la prueba se evaluará, no sólo la comprensión de los conceptos básicos y la resolución de problemas, sino también, la formulación correcta en lenguaje matemático, y el desarrollo de argumentos lógicos, con clara identificación de hipótesis y conclusiones.

El resto, una prueba tipo test, será opcional para los alumnos y responderá a la evaluación continua que se fijará específicamente durante el curso académico y se anunciará en el curso virtual. Con un peso menor que la prueba presencial servirá como entrenamiento para el examen final.

En caso de que el alumno decida no realizar el ejercicio de evaluación continua la nota final será la de la Prueba Presencial. En caso contrario, la nota final es el máximo entre la nota de la Prueba Presencial y la media ponderada (con pesos de 80% y 20%) de la Prueba Presencial y la Prueba de evaluación continua siempre que la nota de la Prueba Presencial sea mayor o igual a 4.

9.BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

Comentarios y anexos:

Espacios de Hilbert y Análisis de Fourier: los primeros pasos

Autores: Antonio García García y María José Muñoz Bouzo

Ed: Sanz y Torres (2ª Edición), 2014.



El alumno seguirá las notaciones y terminología del libro en su estudio, pues ésta puede variar de unos libros a otros. La oficial será la del libro base.

El texto desarrolla los contenidos básicos de la asignatura "Introducción a los espacios de Hilbert". Se ha pretendido que el texto sea autocontenido.

Consta de un primer capítulo de introducción donde se resaltan algunas diferencias entre los espacios de dimensión finita y los de dimensión infinita y se introducen algunos ejemplos de espacios que se utilizarán a lo largo de todo el libro.

Los capítulos restantes (del 2 al 8) están dedicados específicamente a los contenidos de esta asignatura. Los conceptos fundamentales de cada tema van acompañados de un buen número de ejemplos. Los ejercicios al final de cada capítulo deben permitir al estudiante comprobar la adquisición de conocimientos. La segunda edición incorpora la corrección de las erratas detectadas y un capítulo final donde se resuelven los ejercicios propuestos en cada capítulo.

A lo largo del libro aparecen ciertos detalles técnicos, relacionados con la integración de Lebesgue, que se salvan de una manera formal. Aunque su conocimiento no es imprescindible para poder seguir la mayoría de los contenidos de este libro, se ha decidido incluir un apéndice en el que se introducen, de manera somera, los fundamentos y resultados más importantes de la integral de Lebesgue. También se comparan con los de la integral de Riemman.

10.BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

ISBN(13): 9780521337175
Título: AN INTRODUCTION TO HILBERT SPACE (Cambridge, 1988)
Autor/es: N. Young ;
Editorial: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS

Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Buscarlo en Catálogo del Patrimonio Bibliográfico

ISBN(13): 9780821819128
Título: AN INTRODUCTION TO HILBERT SPACE (2ª edición (1999))
Autor/es: S. K. Berberian ;
Editorial: AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY

Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Buscarlo en Catálogo del Patrimonio Bibliográfico

Comentarios y anexos:



Introduction to Hilbert Space de S.K. Berberian

Existen diversas impresiones en distintas editoriales de la segunda edición, p.e., en Oxford University Press (1961) o incluso una edición en castellano en la editorial Teide (1970) que aunque está descatalogada, sí existe en muchas bibliotecas. Libro de introducción a los espacios de Hilbert con numerosos ejercicios. No estudia sin embargo ni las series de Fourier clásicas, ni la transformada de Fourier ni operadores de convolución ni los espacios de Hilbert con núcleo reproductor.

An Introduction to Hilbert Space de N. Young

Es un texto de introducción a los espacios de Hilbert que se complementa con aplicaciones de la teoría a las soluciones de las ecuaciones en derivadas parciales y a la aproximación de funciones de variable compleja. Contiene numerosos ejemplos y ejercicios. No cubre la transformada de Fourier ni operadores de convolución ni los espacios de Hilbert con núcleo reproductor.

Fourier Analysis and Applications de C. Gasquet y P. Witomski

Es un magnífico texto de ampliación donde las nociones fundamentales del Análisis de Fourier se aplican en análisis de señales (análisis de tiempo-frecuencia, tiempo-escala y el procesado de señales). El libro original es en francés (ed. Dunod) aunque existe una traducción al inglés (1999, ed. Springer Verlag).

11.RECURSOS DE APOYO

Curso Virtual. La UNED pone a disposición de los alumnos un curso virtual atendido por profesores en el cual se abren posibilidades como la comunicación con un tutor virtual que resolverá las dudas tanto generales como específicas de la asignatura, la comunicación entre alumnos de la asignatura en el foro de alumnos y además se irán abriendo foros con cuestiones específicas de temas concretos en el que los alumnos podrán intercambiar soluciones, correcciones a otros alumnos y en el que el profesor sólo intervendrá cuando sea necesario para reconducir el debate.

12.TUTORIZACIÓN

El equipo docente realizará la tutorización fundamentalmente a través del Curso Virtual. El Seguimiento del Aprendizaje se realizará mediante el curso virtual y los foros abiertos para ese fin. En él se habilitarán foros temáticos en los que el alumno podrá plantear sus dudas y trabajar junto con sus compañeros.

Tutorización telefónica en los horarios de guardia del profesor de la sede Central.

Tutorización postal.

Tutorización presencial (previa cita) en la Sede Central en los horarios de guardia del profesor.

Horario de guardia:

Miércoles de 12:30 a 13:30 y de 15:00 a 18:00

Despacho 132

Tfno 913988110

Facultad de Ciencias

13.Recomendaciones

Se recomienda visitar periódicamente, una vez a la semana es suficiente, el Curso Virtual de la asignatura.

