

ANÁLISIS ACTUAL DE PROBLEMAS DE MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS: MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS, MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO Y MÉTODOS SIN MALLA

Curso 2015/2016

(Código:28801034)

1.PRESENTACIÓN

La dificultad para encontrar soluciones cerradas a las ecuaciones diferenciales que definen el comportamiento de los medios continuos y la aparición del ordenador, provocaron un espectacular desarrollo de los métodos de búsqueda de solución aproximadas entre los que hay que destacar el Método de los Elementos Finitos (MEF).

Como alternativa a este método (en este sentido también habría que referirse a otros como Diferencias Finitas o Volúmenes Finitos), se podría tratar de transformar las ecuaciones diferenciales en un conjunto de ecuaciones integrales como primer paso para su solución (antes de cualquier proceso de discretización o introducir cualquier aproximación). Este conjunto de ecuaciones incluirá los valores de las variables en los extremos del rango de integración, es decir en los contornos del dominio de integración, y la posterior discretización deberá realizarse únicamente en el contorno. Esta será una de las mayores ventajas de Método de los Elementos de Contorno frente a los mencionados anteriormente (que precisan discretizar el dominio) y, por tanto, se manejarán sistemas de ecuaciones más pequeños (aunque llenos) que en el caso del MEF.

Hay muchos problemas de mecánica (extrusión, fundición, propagación de grietas, etc) que no se resuelven sin grandes dificultades con los métodos numéricos más convencionales tales como elementos finitos, volúmenes finitos o diferencias finitas, y una de las razones está, en la característica de dichos métodos de dependencia de una malla o exigencia de regularidad en la disposición de nodos. La modificación en la geometría o en las discontinuidades, obliga a remallar en cada paso de la evolución del problema, de forma que al hacerlo, además, se respeten las irregularidades y características propias del proceso. Todo esto introduce numerosas dificultades, como es por ejemplo la relación entre mallados sucesivos, que afectan a la precisión, tiempo de ejecución, complejidad de los propios programas, etc. Por todo ello se comprende el enorme interés de los denominados Métodos sin Malla, de los que se abordarán el Método de Galerkin sin elementos y el de Diferencias Finitas Generalizadas.

Oñate et al. han dado una interesante definición para los métodos sin malla (meshless methods), como aquellos en los que la



aproximación puede ser construida estrictamente en términos de nodos, ya que lo importante es que una malla de base no afecta al tratamiento de las discontinuidades, puesto que no precisa ser compatible con los nodos ni con el dominio al que se superpone, pudiéndose por tanto generar con suma facilidad.

Por otra parte, las funciones de aproximación, y concretamente aquellas que constituyen una partición de la unidad, tienen muchas propiedades comunes con las funciones de forma utilizadas en el método de los elementos finitos, pero tienen frente a ellas una ventaja muy interesante y es que pueden ser tan suaves como se desee (incluso C^∞), lo que permite soluciones con derivadas continuas. Esto únicamente obligará a utilizar alguna técnica especial para definir el soporte de las funciones de ponderación en la proximidad de las discontinuidades.

2.CONTEXTUALIZACIÓN

El objetivo general de la asignatura es profundizar en el estudio de los procedimientos actuales de cálculo en el área de mecánica de medios continuos, atendiendo tanto a los fundamentos teóricos y aspectos matemáticos de su formulación, como a las técnicas de programación y procedimientos numéricos de resolución, sin renunciar, no obstante, a aquellos aspectos más prácticos que posibiliten la aplicación de los conocimientos adquiridos.

Se trata de una asignatura metodológica, cuyo contenido puede aplicarse a problemas planteados en la práctica totalidad de las áreas que componen el programa. Se ha planteado fundamentalmente para problemas de mecánica de medios continuos, con objeto de que resulte más sencilla de asimilar para un alumno con la formación clásica de cualquier ingeniería y, también, para que sea una ayuda más directa a las asignaturas de especialidad mecánica del postgrado.

3.REQUISITOS PREVIOS RECOMENDABLES

Es conveniente haber cursado las asignaturas de matemáticas de una ingeniería para manejar los elementos básicos de matrices y cálculo numérico, sistemas, valores y vectores propios, métodos de resolución de ecuaciones diferenciales, etc. Se deberá estar familiarizado con la notación indicial, vectores y tensores, reglas elementales de transformación, identidades integrales, interpolación, transformaciones geométricas, etc. Para la realización de algún trabajo práctico utilizando algún programa, sería conveniente tener alguna base de programación y conocimiento de algunos algoritmos básicos.

Para el caso de que el alumno necesitara revisar alguno de los conceptos indicados, se indicaría una documentación inicial adecuada.

Por otra parte, también es necesario un conocimiento adecuado de las leyes de comportamiento de los materiales (elasticidad, plasticidad...), Resistencia de Materiales y Cálculo de Estructuras; así como haber cursado las asignaturas de Métodos de análisis no lineal de en ingeniería (P015) y Métodos computacionales en Ingeniería (P025) del Módulo I : Contenidos Transversales.

Sería recomendable que los estudiantes cuenten con acceso a Internet para el seguimiento de los foros y las actividades propuestas por el equipo docente. Sería recomendable un conocimiento de inglés suficiente para la lectura de una parte importante del material que se manejará a lo largo del curso (artículos, libros, programas, etc).

4.RESULTADOS DE APRENDIZAJE

En esta asignatura se aborda inicialmente el MEF partiendo de un planteamiento general, aunque sin profundizar en el cuerpo matemático que sobre el tema se ha establecido con el tiempo. Se trata exhaustivamente la barra y el problema elástico, lo que además sirve para introducir con suficiente detalle las principales ideas y pormenores del método.

El objetivo de los temas dedicados al método de los elementos de contorno es introducir los conceptos fundamentales del mismo, abordando problemas que pueden ser resueltos eficazmente con este método. A lo largo de los temas se irán tratando casos progresivamente más complejos por su dimensión, tipo de ecuaciones que los definen o, simplemente, por el orden de la discretización numérica.



Uno de los objetivos fundamentales de los denominados métodos sin malla, es eliminar en parte las dificultades que en para la solución de muchos problemas supone la necesidad de utilizar una malla o la regularidad en la disposición de nodos, realizando una aproximación en términos nodales únicamente. El objeto de su estudio es que el alumno conozca una herramienta realmente adecuada para la solución de problemas clásicos en Construcción, Fabricación o Mecánica en general, como son la extrusión, propagación de grietas, etc.

Con el estudio de la materia propuesta en el programa de la asignatura, se pretende que el alumno conozca las tendencias más actuales en la utilización de métodos numéricos para aproximar la solución a problemas de medios continuos.

Objetivos:

- 1.- (conocimientos) Formulación general de cada uno de los métodos.
- 2.- (conocimientos) Estudio del tratamiento con estos métodos de problemas de potencial, elasticidad, dinámica y algunos problemas no lineales.
- 3.- (conocimientos) Análisis de la organización y estructura de la resolución de dichos problemas, mediante el estudio de los programas informáticos desarrollados por el equipo docente.
- 4.- (habilidades y destrezas) Aplicación a la resolución de problemas prácticos. Se trata de que el alumno realice al menos un ejercicio de aplicación con cada uno de los métodos.
- 5.- (actitudes) Análisis crítico de las ventajas e inconvenientes de la utilización de los diferentes métodos.
- 6.- (actitudes). Reestructuración cognitiva adecuada para la comprensión de la utilización de los métodos numéricos a la resolución de problemas de mecánica de medios continuos.
- 7.- (habilidades y destrezas) Elaboración de un trabajo de investigación, de manera que el alumno pueda profundizar algo más en algún aspecto particular de la materia de estudio.

5.CONTENIDOS DE LA ASIGNATURA

EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Tema 1. Conceptos básicos.

Introducción. Planteamiento diferencial.
Formulación integral de problema de valor en el contorno.
Aproximación.

Tema 2. El Método de Elementos Finitos (MEF).

Características del MEF.
Idea de elemento.
Coordenadas naturales. Elementos estándar.
Integración numérica.
Síntesis de las características globales. Aplicación de las condiciones de contorno esenciales.

Tema 3. Aplicación del MEF al caso de barras.

Tema 4. Aplicación del MEF problemas de elasticidad lineal.

Tema 5. Introducción al análisis no lineal con elementos finitos.

Introducción. Tipos de problemas no lineales.
Formulación mediante el MEF.
Solución: Métodos iterativos, incrementales e incrementales-iterativos.

EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Tema 6. Problemas de potencial en régimen estacionario.

Ecuaciones que definen el problema.
Soluciones particulares.
Método directo de elementos de contorno para un dominio homogéneo.
Formulación integral.
Discretización de la superficie integral y formulación del sistema de ecuaciones.
Cálculo de las velocidades y potencial en los puntos internos.



Integración sobre los elementos.
Aplicación a dominios no homogéneos.
Formulación del método indirecto de elementos de contorno.
Discretización de la superficie.
Formación del sistema de ecuaciones.
Integración.

Tema 7. Problemas de elasticidad.
Planteamiento diferencial.
Soluciones particulares.
Formulación del método directo de los elementos de contorno.
Discretización de las integrales en el contorno.
Cálculo en los puntos interiores.

Tema 8. Problemas de elasticidad dinámica.
Ecuaciones de Navier. Soluciones fundamentales.
Ecuaciones de propagación de ondas. Soluciones fundamentales.
Formulación integral para problemas elastodinámicos en régimen estacionario.
Formulación integral para problemas transitorios de propagación de ondas.

MÉTODOS SIN MALLA

Tema 9. Conceptos básicos.
Introducción a la interpolación.
Ajuste de curvas mediante el método de mínimos cuadrados.
Ajuste de curvas mediante el método de mínimos cuadrados móviles.

Tema 10. Funciones de aproximación sin malla.
Aproximación mediante mínimos cuadrados móviles.
Métodos de partición de la unidad.
Tratamiento de bordes.

Tema 11 Discretización mediante formas integrales. Proyección.
Método de Galerkin.
Condiciones de contorno.
Evaluación de las integrales.

Tema 12 Método de Diferencias Finitas Generalizadas (MDFG).

Introducción. Método de Diferencias Finitas.

Aproximación mediante diferencias finitas generalizadas. Fórmulas en diferencias.

Influencia de los principales parámetros.

Aplicación al caso de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales dependientes del tiempo.

Aplicación al caso de sistemas de ecuaciones diferenciales. Problemas elásticos.

Nota: Con objeto de que cada método se pueda estudiar independientemente se han repetido algunos puntos del programa (p. e. el planteamiento diferencial de los diferentes problemas)

6.EQUIPO DOCENTE

■ [JUAN J. BENITO MUÑOZ](#)



7.METODOLOGÍA

Esta asignatura ha sido diseñada según la modalidad a distancia. El estudiante debe contar con el material necesario para afrontar el estudio de manera autónoma. No obstante es necesario, e insistimos en esto, una planificación objetiva de las tareas que se proponen a lo largo y al final del curso.

El estudio de la asignatura se hará a partir de los textos básicos, los artículos publicados en la web de la asignatura y la bibliografía complementaria. No obstante, la modalidad a distancia no significa que el estudiante se enfrenta a la tarea en soledad. La plataforma virtual es una estrategia básica para que el estudiante participe en ella exponiendo sus dudas y resolviendo los problemas propuestos por el equipo docente.

Además de la bibliografía recomendada en cada bloque, en la plataforma virtual irán incluyéndose artículos ya publicados o escritos por el equipo docente u otros, en relación con cada uno de los temas del programa.

Los estudiantes tendrán que realizar los ejercicios propuestos para los diferentes temas del contenido y su aprendizaje estará orientado a la formulación de su trabajo final de investigación.

Aprendizaje basado en problemas (desarrollar aprendizajes activos basados en la resolución de problemas).

Aprendizaje orientado a problemas (realización de un proyecto aplicando conocimientos y habilidades adquiridos).

Plan de trabajo:

1. Lectura y estudio de los textos básicos.
2. Debate y participación en los foros.
3. Realización y entrega de las tareas a lo largo del curso.
4. Estudios previos y preparación del trabajo de investigación
5. Entrega y discusión del trabajo final de investigación.

La planificación temporal de la asignatura queda resumida en la tabla que se incluye a continuación.

Tema 1. EF. Conceptos básicos

Tema 2. El MEF

Tema 3. Aplicación del MEF al caso de barras

Tema 4. Aplicación del MEF al caso de elasticidad lineal

Tema 5. Introducción al análisis no lineal con elementos finitos

EJERCICIO MEF

Tema 6. BEM. Problemas de potencial en régimen estacionario

Tema 7. BEM. Problemas de elasticidad

Tema 8. BEM. Problemas de elasticidad dinámica

EJERCICIO BEM

Tema 9. MSM. Conceptos básicos

Tema 10. MSM. Funciones de aproximación sin malla

Tema 11. MSM. Discretización mediante formas integrales. Proyección



Tema 12. MSM. Método de Diferencias finitas generalizadas

EJERCICIO MSM

TRABAJO FINAL

8.BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

ISBN(13): 9781600219772

Título: THE GENERALIZED FINITE DIFFERENCE METHOD. LIBRO: LEADING-EDGE APPLIED MATHEMATICAL MODELING RESEARCH. CAPÍTULO 7 LIBRO 251-293

Autor/es: Benito Muñoz, Juan José ; Gavete Corvinos, Luis ; Ureña Prieto, Francisco ; - ;

Editorial: Nova Science Publishers, Inc. USA.

Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Buscarlo en Catálogo del Patrimonio Bibliográfico

ISBN(13): 9788436268874

Título: 978-84-3626887-4 (Colección Máster, UNED)

Autor/es: Alvarez Cabal, R. ; Benito Muñoz, Juan José ;

Editorial: Ed. UNED

Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Buscarlo en Catálogo del Patrimonio Bibliográfico

Comentarios y anexos:

1.- Bibliografía recomendada

1.- Temas 1 a 5:

- Álvarez Cabal R., Benito Muñoz J.J., Teoría General del MEF. E.T.S.I.I. UNED. 1994.

- Benito Muñoz J.J., Álvarez Cabal R.: Introducción al MEF y su aplicación. 86 pgs. Apuntes disponibles a través del Curso Virtual.

2.- Temas 6 a 8:

- Benito Muñoz J.J. (Tesis Doctorales y artículos).

3.- Temas 9 a 12:

- Benito Muñoz J.J., Métodos sin malla: Método de Galerkin libre de Elementos Element Free Galerkin (EFG)) . 80 pgs. Apuntes disponibles a través del Curso Virtual.

- Benito Muñoz J.J., Ureña Prieto F., Gavete L.: The Generalized Finite Difference Method. libro: Leading-Edge Applied Mathematical Modeling Research. Capítulo 7 libro 251-293. Nova Science Publishers, Inc. (ISBN 978-1-60021-977-2). 2007. USA.

2- Lecturas obligatorias comentadas.



Esta bibliografía se encontrará a disposición de los alumnos en el aula virtual.

- Alarcón E, Domínguez J, Fraile A. *The Boundary Element Method in Soil Mechanics (in spanish)*. In: Ministerio de Fomento, CEDEX, SEMSIG, editors. Homenaje a J.A. Jimenez Salas. Geotecnia en el año 2000. Madrid, 2000.
- Álvarez-Rubio S, Benito JJ, Sánchez-Sesma FJ, Alarcón E. *The direct boundary element method: 2D site effects assessment on laterally varying layered media (methodology)*. Soil Dyn. Earthq. Eng. 2004; 24: 167-180.
- Benito J.J., Ureña F., Gavete L., *Influence of several factors in the generalized finite difference method*, Applied Mathematical Modelling, 25(12)(2001) 1039-1053.
- L. Gavete, M.L. Gavete, J.J. Benito, *Improvements of generalized finite difference method and comparison with other meshless method*, Applied Mathematical Modelling, 27,10, (2003), 831-847.
- F. Ureña, JJ. Benito, L. Gavete, R. Alvarez: *Resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales dependientes del tiempo de segundo orden utilizando diferencias finitas generalizadas*, Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol 19, 3, 331-340 (2003).
- F. Ureña, JJ. Benito, L. Gavete, R. Alvarez: *Computational error approximation and h-adaptive algorithm for 3-D Generalized Finite Difference Method*, Int. Jour. For computational methods in Engineering Science and Mechanics 6, 31-39 (2005)

9.BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

Comentarios y anexos:

Esta bibliografía debe entenderse como de consulta, en algún caso como alternativa, debiéndose el alumno poner en contacto con el profesor de la asignatura antes de su utilización.

- Alvarez S., Benito J.J., Sánchez-Sesma F., Alarcón E., *The use of Direct Boundary Element Method for gainings insight into complex seismic site response*, Computers & Structures, 83, Issue 10-11, 821-835, 2005.
- Banerjee P.K., *The Boundary Element Methods in engineering*, McGRAW-HILL, 1994.
- Bathe, K.J., *Finite element procedures*, Prentice Hall, 1996.
- Belytscho T., Lu YY, GU L., *Element free-Galerkin method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 1143, 397-414 (1994).
- J.J. Benito, F. Ureña, L. Gavete, R. Alvarez, *An h-adaptive method in the generalized finite differences*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 192, (2003), 735-739.
- Doblaré M., Gracia L. *Análisis lineal de estructuras (Vol. I)*. Dpto. Ingeniería Mecánica. Universidad de Zaragoza.
- Domínguez J., *Boundary Elements in Dynamics*, Computational Mechanics Publications, Elsevier Applied Science, 1993
- Domínguez J, Alarcón E. Elastodynamics. In: Brebbia CA, editors. *Progress in Boundary Element Methods*. London, Plymouth: Pentech Press, 1981.
- Duarte and J. T. Oden, *H-P Cloud-An h-p Meshless Method*, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 12 (1996) 673-705.
- Fagan, M.J.: *Finite element analysis. Theory and Practice*. Longman Scientific and Technical, 1992.
- L. Gavete, J.J. Benito, S. Falcon and A. Ruiz, *Implementation of essential boundary conditions in a meshless method*, Communications in Numerical Methods in Engineering, 16 (2000) 409-421.
- Hughes, T.V.R.: *Finite element method*. Prentice Hall, 1987.
- Kardestuncer, H. *Introducción al análisis estructural con matrices*. Mc Graw-Hill, 1975.
- Lancaster P., Salkauskas K., *Surfaces generated by moving least squares methods*, Math Comput 137, 141-158, (1981).
- T. Liszka and J. Orkisz, *The Finite Difference Method at Arbitrary Irregular Grids and its Application in Applied Mechanics*, Computer and Structures, 11 (1980) 83-95.
- W. K. Liu, S. Jun, S. Li, J. Adee and T. Belytschko, *Reproducing Kernel Particle Methods for Structural Dynamics*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 38 (1995) 1655-1679.
- Liu G.R.: *Mesh Free methods*, Ed. CRC Press, 2003
- Li S., Liu W.K.: *Mesh Free particle methods*, Ed. Springer-Verlag, 2004.
- Mitchel A.R., Griffiths D.F., *The finite Difference Method in Partial Differential Equations*, Int. Jour. For Numerical Methods in Engineering.
- Monaghan J. J., *An introduction to SPH*, Computer Physics Communications, 48, 89-96, (1988).
- B. Nayroles, G. Touzot, and P. Villon, *Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements*, Computational Mechanics, 10 (1992) 307-318.
- Oñate, E., *Cálculo de estructuras por el Método de Elementos Finitos. Análisis elástico lineal*, C.I.M.N.E., 1995.
- E. Oñate, S. Idelsohn, O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, *A Finite Point Method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow*, International Journal for Numerical Methods



in Engineering, 39 (1996) 3839-3866.

- J. Orkisz: *Meshless finite difference method II. Adaptive approach*, Computational Mechanics, Idelson, Oñate, Duorkin (Eds.), iacm, CINME (1998).
- J. Orkisz: *Meshless finite difference method I. Basic approach*, Computational Mechanics, Idelson, Oñate, Duorkin (Eds.), iacm, CINME (1998).
- J. Orkisz, *Finite Difference Method (Part III)*, in Handbook of, Computational Solid Mechanics, M. Kleiber (Ed.) Springer-Verlag, Berlin, 1998, 336-432.
- N. Perrone and R. Kao, *A general finite difference method for arbitrary meshes*, Computer and Structures 5 (1975) 45-58.
- Pilkey, W.D., Wunderlich, W.: *Mechanics of Structures variational and computational methods*, CRC Press Inc., 1994.
- Reddy, J.N.: *Applied functional analysis and variational methods in engineering*. McGraw-Hill, 1986.
- Szabó, B. Babuška, I.: *Finite element analysis*, John Wiley and Sons, 1991.
- Zienkiewicz, O.C. y Taylor R.C.: *El método de los elementos finitos. (vols. 1 y 2) (5ª edición)*, 2004.

10.RECURSOS DE APOYO AL ESTUDIO

1.- Curso virtual

2.- Videoconferencia

Se concretarán fechas para su realización a lo largo del curso a través del aula virtual.

3.- Software para prácticas.

Programas realizados por el equipo docente del MEF, BEM, EFG y DFG para prácticas. Disponibles a través del Curso Virtual.

11.TUTORIZACIÓN Y SEGUIMIENTO

Horario de atención al estudiante:

Lunes de 10 a 14 h y de 16:30 a 20:30 h. , Juan del Rosal, 14, 28040, Madrid ,DESPACHO 4.23 (Edificio de la Escuela de Informática).

Tels.: 91 398 64 57

Email: jbenito@ind.uned.es

Aula Virtual.

12.EVALUACIÓN DE LOS APRENDIZAJES

La evaluación consistirá en una prueba presencial (30%) y la realización de un trabajo de síntesis (70%), para cuya asignación el alumno deberá ponerse en contacto telefónico o por correo electrónico con el equipo docente. Cualquier modificación se indicará en el curso virtual de la asignatura.

Dado que el periodo lectivo de la asignatura se desarrollará durante el segundo cuatrimestre, la prueba presencial se realizará en la convocatoria de junio o en la de septiembre.

13.COLABORADORES DOCENTES

Véase equipo docente.

