

# INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Curso 2016/2017

(Código: 61023021)

## 1. PRESENTACIÓN DE LA ASIGNATURA

En esta asignatura se presentan las nociones básicas de las ecuaciones diferenciales ordinarias, junto con su conexión y aplicaciones a otras ramas de las Matemáticas y de otras Ciencias.

Créditos ECTS: 6. Asignatura semestral. Primer semestre del tercer curso.

## 2. CONTEXTUALIZACIÓN EN EL PLAN DE ESTUDIOS

Las ecuaciones diferenciales forman, por una parte, una de las grandes subramas del Análisis matemático; con importantes contactos con otras ramas de las Matemáticas, como la Geometría diferencial, la Teoría de variable compleja, la Optimización y el Cálculo de variaciones. Por otro lado, las ecuaciones diferenciales son una herramienta omnipresente en Física e Ingeniería desde que Galileo y Newton fundaron la Física moderna. En la actualidad también tienen aplicaciones relevantes en Química, Biología y Ciencias sociales.

Las ecuaciones *lineales* son importantes (en Matemáticas, Física e Ingeniería), debido a que, o bien corresponden con la naturaleza de los problemas, o bien constituyen una primera aproximación a modelos no lineales. En los últimos 100 años han ido desarrollándose poco a poco modelos no lineales de ecuaciones diferenciales ordinarias, apoyándose primero en el análisis cualitativo y después también en los ordenadores y los programas informáticos de cálculo científico. No obstante, los modelos lineales siguen siendo fundamentales: 1) porque en muchos campos proporcionan un cuerpo de doctrina básico o al menos una firme orientación, y 2) porque la linealización es uno de los instrumentos para estudiar los problemas no lineales.

Esta asignatura es indispensable para cursar y entender la asignatura del segundo semestre "Análisis de Fourier y Ecuaciones en Derivadas Parciales".

## 3. REQUISITOS PREVIOS REQUERIDOS PARA CURSAR LA ASIGNATURA

Se requieren conocimientos básicos en Geometría euclídea, Álgebra lineal y Análisis Matemático de una y varias variables reales. De hecho, el Análisis Matemático de una variable se debe dominar ampliamente.

## 4. RESULTADOS DE APRENDIZAJE

Algunas de las competencias más importantes que se adquieren con esta asignatura son:

1. Conocimientos generales en uno de los principales campos de las Matemáticas.
2. Aplicación de los métodos y técnicas matemáticas a diversos problemas de la realidad, modelización de la realidad.



3. Capacidad de combinar razonamientos deductivos, razonamientos inductivos, inferencia empírica y aprendizaje directo en la literatura matemática y sus aplicaciones.

4. Capacidad de comunicación de los resultados (en la evaluación se tendrá en cuenta también la buena exposición de las soluciones a los ejercicios propuestos, el rigor en las demostraciones, y la correcta comprensión de todo lo que se hace).

5. Motivación histórica y práctica de problemas clásicos de las matemáticas y de sus aplicaciones.

## 5. CONTENIDOS DE LA ASIGNATURA

TOMO I

### UNIDAD DIDÁCTICA 1

Tema I. Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias

1.1. Definiciones. Ejemplos.

1.2. Interpretación geométrica. Curvas integrales.

1.3. Ecuación diferencial de un haz de curvas planas.

Ejercicios de autocomprobación con soluciones.

Tema II. Métodos elementales de integración de ecuaciones diferenciales (I)

2.1. Ecuaciones de variables separadas.

2.2. Ecuaciones homogéneas.

2.3. Ecuaciones reducibles a homogéneas.

Ejercicios de autocomprobación con soluciones.

Tema III. Métodos elementales de integración de ecuaciones diferenciales (II)

3.1. Ecuación lineal.

3.2. Ecuación de Bernoulli.

3.3. Ecuación de Riccati.

Ejercicios de autocomprobación con soluciones.

Tema IV. Métodos elementales de integración de ecuaciones diferenciales (III)

4.1. Condición necesaria para que una ecuación sea diferencial exacta.

4.2. Condición suficiente para que una ecuación sea diferencial exacta.

Ejercicios de autocomprobación con soluciones.

Tema V. Métodos elementales de integración de ecuaciones diferenciales (IV)

5.1. Integración de ecuaciones diferenciales exactas.

5.2. Factores integrantes.



Ejercicios de auto comprobación con soluciones.

Tema VI. Métodos elementales de integración de ecuaciones diferenciales (V)

6.1. Cociente de factores integrantes.

6.2. Diversos tipos de factores integrantes.

Ejercicios de auto comprobación con soluciones.

## UNIDAD DIDÁCTICA 2

Tema I. Ecuaciones de primer orden no lineales en  $y'$  (I)

1.1. Ecuación de Lagrange.

1.2. Ecuación de Clairaut.

1.3. Ecuaciones resolubles en  $y$  o en  $x$ .

Ejercicios de auto comprobación con soluciones.

Tema II. Ecuaciones de primer orden no lineales en  $y'$  (II)

2.1. Ecuaciones en las que falta la  $x$  o la  $y$ .

2.2. Ecuaciones homogéneas.

Ejercicios de auto comprobación con soluciones.

Tema III. Aplicaciones geométricas

3.1. Problemas de trayectorias

3.2. Curvas de nivel y líneas de máxima pendiente sobre una superficie.

Ejercicios de auto comprobación con soluciones.

Tema IV. Ecuaciones diferenciales de orden superior (I)

4.1. Ecuaciones que no contienen la variable  $y$ .

4.2. Ecuaciones que no contienen la variable  $x$ .

4.3. Ecuaciones que contienen solamente dos derivadas cuyos órdenes difieran en dos unidades.

Ejercicios de auto comprobación con soluciones.

Tema V. Ecuaciones diferenciales de orden superior (II)

5.1. Ecuaciones diferenciales exactas.

5.2. Ecuaciones homogéneas.

Ejercicios de auto comprobación con soluciones.

Tema VI. Problemas geométricos de ecuaciones diferenciales



## UNIDAD DIDÁCTICA 3

Tema I. Estudio de la existencia de soluciones en las ecuaciones diferenciales

- 1.1. Sucesiones equicontinuas de funciones.
- 1.2. Teorema de Ascoli.
- 1.3. Teorema de existencia de Peano.

Tema II. Teoremas de existencia y unicidad de soluciones en las ecuaciones diferenciales

- 2.1. Método de Picard.
- 2.2. Método de las aplicaciones contractivas.
- 2.3. Teorema de Cauchy.

Tema III. Estudio de la existencia y unicidad de soluciones en los sistemas de ecuaciones diferenciales

- 3.1. Ecuaciones diferenciales de orden superior y sus sistemas.
- 3.2. Teorema de existencia de Peano.

Tema IV. Teoremas de existencia y unicidad de soluciones en los sistemas de ecuaciones diferenciales

- 4.1. Método de Picard.
- 4.2. Método de las aplicaciones contractivas.
- 4.3. Teorema de Cauchy.

Tema V. Dependencia de los datos

- 5.1. Variación de las condiciones iniciales
- 5.2. Variación de la función

Tema VI. Derivación con respecto a los datos iniciales

- 6.1. Derivación con respecto a la ordenada.
- 6.2. Derivación con respecto a la abscisa.

TOMO II

## UNIDAD DIDÁCTICA 4

Tema I. Prolongación de las soluciones en las ecuaciones diferenciales.

- 1.1. Intervalo máximo de existencia de una solución.
- 1.2. Prolongación de soluciones en el caso de dominios acotados.



1.3. Soluciones de los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales.

Tema II. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales (I).

2.1. Propiedades de las soluciones en un sistema lineal y homogéneo.

2.2. Fórmula de Liouville.

2.3. Reducción de orden de un sistema lineal y homogéneo.

Tema III. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales (II).

3.1. Método de variación de los parámetros.

3.2. Forma matricial de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales.

3.3. La ecuación lineal de orden  $n$ .

Tema IV. Ecuaciones lineales con coeficientes constantes (I).

4.1. Soluciones complejas de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

4.2. Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes: caso de raíces simples.

4.3. Determinación de las soluciones reales en el caso de raíces simples.

Ejercicios de autoverificación con soluciones.

Tema V. Ecuaciones lineales con coeficientes constantes (II).

5.1. Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes: caso de raíces múltiples.

5.2. Determinación de las soluciones reales en el caso de raíces múltiples.

5.3. Ecuación lineal no homogénea con coeficientes constantes.

Ejercicios de autoverificación con soluciones.

Tema VI. Ecuaciones lineales con coeficientes constantes (III).

6.1. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes: método de eliminación.

6.2. Ecuación de Euler.

Ejercicios de autoverificación con soluciones.

## UNIDAD DIDÁCTICA 5

Tema I. Soluciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes (I).

1.1. Funciones casipolinomiales.

1.2. Sistemas homogéneos de ecuaciones diferenciales lineales.

1.3. Soluciones reales de los sistemas homogéneos de ecuaciones diferenciales lineales.

1.4. Ejercicios de autoverificación con soluciones.



Tema II. Vectores propios y valores propios en una transformación lineal.

2.1. Determinación de los valores propios y de los vectores propios.

2.2. Propiedades de los vectores propios.

2.3. Diagonalización de una matriz.

Tema III. Estudio del polinomio característico.

3.1. Teorema de Cayley-Hamilton.

3.2. Reducción de una matriz a forma casidiagonal.

Tema IV. Reducción de una matriz a forma canónica.

4.1. Estudio de las transformaciones lineales nilpotentes.

4.2. Teorema de Jordan.

Tema V. Soluciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes (II).

5.1. Caso de raíces simples de la ecuación característica.

5.2. Caso de raíces múltiples de la ecuación característica.

Tema VI. Soluciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes (III).

6.1. Utilización de las series de matrices para la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

## UNIDAD DIDÁCTICA 6

Tema I. La ecuación lineal y homogénea de segundo orden.

1.1. Forma normal para la ecuación lineal y homogénea.

1.2. Teoremas de Sturm.

Ejercicios de autocomprobación con soluciones.

Tema II. El problema de Sturm-Liouville (I).

2.1. Sistema de Sturm-Liouville.

2.2. Reducción del sistema de Sturm-Liouville a forma normal.

Ejercicios de autocomprobación con soluciones.

Tema III. El problema de Sturm-Liouville (I).

3.1. Proposiciones previas al teorema de oscilación.

3.2. El teorema de oscilación.

Ejercicios de autocomprobación con soluciones.



Tema IV. Estudio de la función de Green.

4.1. Función de Green.

4.2. Utilización de la función de Green.

Ejercicios de autocomprobación con soluciones.

Tema V. La ecuación diferencial de Legendre.

5.1. Desarrollo de una solución en serie.

5.2. Ecuación de Legendre.

Ejercicios de autocomprobación con soluciones.

Tema VI. La ecuación diferencial de Bessel.

6.1. Singularidades regulares.

6.2. La ecuación de Bessel.

Ejercicios de autocomprobación con soluciones.

-----

El Tomo I entra íntegramente en el examen.

Del Tomo II sólo entran en el examen, en su caso, los temas que indique el profesor en el foro virtual, al comienzo del curso.

## 6.EQUIPO DOCENTE

- [FIDEL JOSE FERNANDEZ Y FERNANDEZ-ARROYO](#)

## 7.METODOLOGÍA Y ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

En cada capítulo se debe llevar a cabo el estudio del siguiente modo:

- Estudio y comprensión del texto base
- Realización de los ejercicios propuestos
- Realización de actividades complementarias si se indican

Se propondrá un ejercicio optativo de evaluación continua. (Ver sección sobre evaluación).

## 8.EVALUACIÓN

La evaluación principal se llevará a cabo mediante un examen presencial de dos horas de duración. Se calificará de 0 a 10.

En el examen podrán aparecer tanto ejercicios o problemas, como demostraciones y preguntas teóricas. En todas las respuestas, será necesario entender bien lo que se hace. Podrán aparecer cuestiones cuyo objetivo sea comprobar esa



comprensión, a la que se dará importancia.

Evaluación continua:

Se propondrá, hacia el mes de diciembre, en el curso virtual, un ejercicio con uno o varios apartados, y con una calificación de 0 a 1. Este ejercicio es optativo. Su nota, en el caso de que sea igual o superior a 0´5, se sumará a la nota de la prueba presencial, con la condición de que la nota final del curso no sobrepase el 10.

En todos los ejercicios, problemas, y demostraciones, será necesario entender bien lo que se hace. Se podrán poner preguntas para comprobar esa comprensión, que es muy importante.

## 9. BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

ISBN(13): 9788436237085  
Título: ANÁLISIS MATEMÁTICO III (5ª)  
Autor/es: Valdivia Ureña, Manuel ;  
Editorial: UNED

Buscarlo en Editorial UNED

Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Comentarios y anexos:

El texto base son los dos tomos de Análisis Matemático III, de Manuel Valdivia Ureña, de la UNED. (Edición revisada y ampliada por Ángel Garrido, Beatriz Hernando y Gaspar Mora).

## 10. BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

Comentarios y anexos:

Bibliografía complementaria

Textos

W.E. Boyce y R.C. DiPrima, Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Limusa, 2005. (Disponible edición digital en inglés).

L. Elsgoltz, Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional. Mir, 1996. (Disponible edición digital en español).

M. de Guzmán, Ecuaciones diferenciales ordinarias. Teoría de estabilidad y control. Alhambra, 1975.

P. Puig Adam, Ecuaciones diferenciales. Biblioteca Matemática, 1970. (Disponible edición digital en español).

G. Simmons, Ecuaciones diferenciales. Con aplicaciones y notas históricas. Segunda Edición. McGraw-Hill, 1993. Nota: Una edición anterior tiene importantes deficiencias de traducción. (Disponible edición digital en español de la Segunda Edición).

D.G. Zill y M.R. Cullen, Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera. Sexta Ed. Thomson, 2006. Incluye



CD-ROM. (Disponible edición digital en español).

#### Libros de problemas

F. Ayres, Ecuaciones diferenciales. Serie de Compendios Schaum . McGraw-Hill, 1994.

R. Bronson, Ecuaciones diferenciales. Serie de Compendios Schaum, McGraw-Hill, diversas ediciones. Hay una edición de 2008.

M. de Guzmán, I. Peral, y M. Wallas, Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Alhambra, 1978.

Los problemas recogidos en este libro son esencialmente los que se proponen en el texto de M. de Guzmán.

A. Kiseliov, M. Krasnov, y G. Makarenko, Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Mir, 1984. (Disponible edición digital en español).

#### Manuales de Matemáticas

I. Bronshtein y K. Semendiaev, Manual de Matemáticas. Mir, 1971. Se reimprime con frecuencia y suele encontrarse en las librerías españolas. Al contrario que otros manuales de fórmulas y tablas, contiene relevantes párrafos de texto explicativo. (Disponible edición digital en español, y otra bastante más extensa en inglés).

M.R. Spiegel, J. Liu y L. Abellanas, Fórmulas y tablas de Matemática aplicada. Segunda edición revisada, Schaum, McGraw-Hill Interamericana de España, Madrid, 2005. Se beneficia del importante refuerzo de L. Abellanas. (Disponible edición digital en español).

Este libro está relacionado con el siguiente, que suele encontrarse en la mayoría de las bibliotecas.

M.R. Spiegel, Manual de fórmulas y tablas matemáticas, Schaum, McGraw-Hill. Diversas ediciones o reimpressiones a partir de 1970. (Disponible edición digital en español).

#### Aplicaciones y modelización

E. Beltrami, Mathematics for Dynamic Modeling. 2ª Ed., Academic Press, 1987. (Stability, optimal control, cycles, bifurcation, catastrophe, chaos). Contiene partes del nivel del curso y también modelos de ecuaciones en derivadas parciales no enumerados en las líneas anteriores.

M. Braun, Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones, Grupo Editorial Iberoamérica, 1990. Original en inglés de 1983. (Disponible edición digital en español).

F.R. Giordano and M.D. Weir, A First Course in Mathematical Modeling. Brooks/Cole Publishing Company, 1985. Modelos interesantes con matemáticas elementales.

W. Simon, Mathematical Techniques for Biology and Medicine. Academic Press, New York, 1972. MIT Press, Cambridge, Mass., 1977. Dover, New York, 1986. Una extensa e intensa muestra de modelos y aplicaciones que utiliza matemáticas accesibles en el tercer curso del Grado.

R. Haberman, Mathematical Models: Mechanical Vibrations, Population Dynamics and Traffic Flow. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998.

P. Puig Adam, Ecuaciones diferenciales. Biblioteca Matemática, 1970. (Disponible edición digital en español). Contiene claras exposiciones de las vibraciones y oscilaciones mecánicas y eléctricas, resonancia y redes eléctricas.

D.G. Zill, Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. Octava Ed. Thomson, 2007. Incluye CD-ROM.

#### Bibliografía más avanzada

Clásicos sobre existencia local y global, unicidad, dependencia en los parámetros y en las condiciones iniciales:



E.A. Coddington and L. Levinson, Theory of ordinary differential equations. McGraw-Hill, New York, 1955.

Ph. Hartman, Ordinary Differential Equations. Second Ed., Birkhäuser, 1982.

Ecuaciones diferenciales en el campo complejo:

E.L. Ince, Ordinary Differential Equations. Dover, 1956.

E. Hille, Ordinary Differential Equations in the Complex Domain. Dover, 1997. Original en John Wiley & Sons, 1976.

Libros que tratan Teoría geométrica, Teoría cualitativa, Teoría de la estabilidad, Sistemas dinámicos:

D.W. Jordan and P. Smith, Nonlinear Ordinary Differential Equations, An Introduction to Dynamical Systems. Third Edition, Oxford University Press, New York, 1999. Fourth Edition, 2007.

V.V. Nemytskii and V.V. Stepanov, Qualitative Theory of Differential Equations. Princeton University Press, 1960.

Caos y fractales:

E. Beltrami, Mathematics for Dynamic Modeling. 2º Ed., Academic Press, 1987.

Cristoforo S. Bertuglia and Franco Vaio, Nonlinearity, Chaos and Complexity: The Dynamics of Natural and Social Sciences, Oxford University Press, New York, 2005.

Robert L. Devaney and Linda Keen, Chaos and Fractals: The Mathematics Behind the Computer Graphics, American Mathematical Society, 1989.

James Gleick, Chaos, Making a New Science. Penguin Group, 1987. Libro de divulgación.

## 11. RECURSOS DE APOYO

Curso virtual donde también se encuentran el foro y correos electrónicos de profesor y alumnos.

## 12. TUTORIZACIÓN

Equipo docente de la asignatura:

Fidel José Fernández y Fernández-Arroyo

Despacho 118  
Departamento de Matemáticas Fundamentales  
Facultad de Ciencias de la UNED  
Paseo Senda del Rey, 9  
28040 Madrid

Horario de atención al alumno:  
Jueves lectivos de 16:00 a 20:00.  
Teléfono: 91-3987226

Correo electrónico:

[ffernan@mat.uned.es](mailto:ffernan@mat.uned.es)

(Es preferible utilizar el correo electrónico del curso virtual, o el foro, o el teléfono).

La tutorización y seguimiento se llevará a cabo en las guardias (para las cuales, el horario es el antes indicado), y también en el foro de la asignatura del curso virtual. En este foro, las preguntas y respuestas son visibles para todos los compañeros, y también se da la oportunidad de que todos participen en los debates o conversaciones.



### 13.Recomendaciones

Se recomienda preguntar por teléfono en las guardias todo lo que no se entienda, y visitar regularmente el curso virtual de la asignatura.

Ámbito: GUI - La autenticidad, validez e integridad de este documento puede ser verificada mediante el "Código Seguro de Verificación (CSV)" en la dirección <https://sede.uned.es/valida/>



9FE955AD73643F34FDAC3142B783C2FB